

平成 21 年 5 月 25 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2008

課題番号：19540046

研究課題名（和文） 一般斜交群の保型 L 函数の研究

研究課題名（英文） Automorphic L-functions for general symplectic groups

研究代表者

古澤 昌秋 (FURUSAWA MASAOKI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：50294525

研究成果の概要：

次数 2 の一般斜交群 $\mathrm{GSp}(4)$ の尖点表現に付随するスピノル L 函数について、その函数等式を中心における特殊値についての研究を行った。この特殊値に関しては、S. Boecherer の予想がある。また、この予想は、直交群やユニタリー群に関する Gross-Prasad 予想の一つの事例にもなっている。本研究においては、Boecherer の予想を証明することが期待される新しい相対跡公式を定式化し、その基本補題をヘッケ環の単位元に関して証明した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2008 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論

1. 研究開始当初の背景

すでに Johns Hopkins University の Joseph Shalika 教授との共同研究によって、Boecherer の予想を証明するような二つの相対跡公式を定式化し、それらについての基本補題(Fundamental Lemma)のヘッケ環の単位元に関する証明も完成し、Memoirs of

the American Mathematical Society 164 (2003), no. 782 として出版していた。

相対跡公式の証明に際しては、単位元についての基本補題の証明がまずなされるべき事項であり、その次は基本補題をヘッケ環の単位元以外の一般の元に拡張することがなされるべきである。

Shalika 教授との共同研究として、

Bessel model に関する Plancherel 測度を Bessel model の明示公式から求め、それに基づく反転公式を用いて、ヘッケ環の一般の元に関する局所 Kloosterman 軌道積分を、組み合わせ論的に決定される、一般化された Kostka 数を係数とする、単位元についての退化した局所 Kloosterman 軌道積分の一次結合で表すことに成功した。Plancherel 測度と反転公式については、Transactions of the American Mathematical Society 354 (2002) に出版した。

したがって、単位元に関する退化した局所 Kloosterman 軌道積分を具体的に計算することが次の課題になる。第一の相対跡公式については、これらをすべて具体的に計算することができた。第2の相対跡公式に関しては、その一辺は第1のものと同一であるが、他の一辺は、二次拡大に関する Base Change を含むものであり、退化しているとはいえ、局所 Kloosterman 軌道積分の計算には困難が予測された。

これら二つの相対跡公式は、GL(2)の場合に Jacquet が有名な Waldspurger の定理の別証明を与えるために確立したものの GSp(4) への一般化であった。したがって、自然なものであるのだが、第一の跡公式は、考える尖点表現の中心指標が自明な場合にしか有効でないという欠点があった。また、第2の跡公式については、中心指標の制限は無いが、前述のように二次拡大に関する Base Change の考察を不可避とするものであった。GL(2)の場合には、Quadratic Base Change は確立し、色々な研究結果が利用できる状況にあるが、次数2の一般斜交群 GSp(4) の Quadratic Base Change については、現在でも殆ど利用できる研究結果が無い状態であり、特殊値に関する詳しい考察へと研究を進めていくには、あらたに GSp(4) の Quadratic Base Change について、GL(2)の場合の Jacquet-Ye の相対跡公式を拡張する必要があるように思われた。GL(2)の場合と大きく異なり、GSp(4)について、さらにもう一つの相対跡公式を確立することは、非常な重荷となることが予測された。

以上の様な状況の下で、これらの問題点を回避できるような第3の相対跡公式はないだろうか、ということが問題として浮上していた。

2. 研究の目的

2006年2月に福岡で開催された研究集会期間中の個人的な研究連絡の中で、Hebrew大学のErez Lapidから、GL(2)の場合に Waldspurger の定理を証明できる

第3の相対跡公式の存在を教えられた。それは、L函数の特殊値を引き出すのに、Rankin-Selberg型のGL(2)とGL(2)のテンソルL函数の積分表示を起源とする周期積分を用いるものであった。

我々のこれまでの二つの相対跡公式は、特殊値サイドに、NovodvorskyによるGSp(4)とGL(1)のテンソルL函数のHecke型の積分表示を用いるものであった。GL(2)についての第3の相対跡公式のGSp(4)での類似を考えてみると、Novodvorskyによるもう一つの積分表示、GSp(4)とGL(2)のテンソルL函数のRankin-Selberg型の積分表示を用いることが想起された。

本研究の目的は、相対跡公式の周期サイドはこれまでの二つと同じ Bessel 周期の2乗を与える軌道積分をとりながら、特殊値サイドには上記の Rankin-Selberg 型の軌道積分を用いた、第3の相対跡公式の成立の可能性を探り、その可能性に確信が持てたならば、その確立に向けて、着実に研究を推進していくことにあった。

3. 研究の方法

前述のように相対跡公式の確立においては、ヘッケ環の単位元に関する基本補題を証明することがまずなされるべきことである。また、それはその相対跡公式の成立を保証するといっても過言でないほどに強力な確証を与えるものである。

基本補題の証明にあたっては、重要なのはあくまで等式であるので、それぞれの局所 Kloosterman 軌道積分を明示的に計算しきらなければいけない、ということはない。しかし、現実的には、抽象的に等式を証明することは困難であり、実際、具体的な計算による証明の後に理論的な証明が発見されることが多い。

したがって、方法としては具体的に軌道積分を明示的に計算し、その後で比較する、という方法をとった。周期サイドの軌道積分については、これまでの二つの相対跡公式に現れるものと同一であり、計算済であった。特殊値サイドの Rankin-Selberg 型の軌道積分については、Lapid による GL(2)の場合の個人的ノート以外の類似の計算例がなく、若干戸惑った。当初は Eisenstein series を unfold して計算することを試みたがうまくいかなかった。Eisenstein series の Fourier 展開を用いるとうまく計算できることが多少の試行錯誤の後に判明した。

それぞれの軌道積分を明示的に計算することに成功した後、次は軌道積分の対応 (Matching) を考えることが問題になる。

これまでの二つの相対跡公式の軌道積分はすべて両側剰余類によってパラメトライズされており、それらの対応は幾何学的に考察することができた。

ところがこの第3の相対跡公式においては、一方の軌道積分は両側剰余類によってパラメトライズされるが、もう一方の軌道積分は Fourier 係数という解析的なものによってパラメトライズされているので、幾何学的に対応を考察することは困難であった。

この困難を克服するにあたっては、次のような方法を用いた。一方の軌道積分については、以前の研究から函数等式の成立することが分かっていた。そこで、新たに計算した軌道積分についても、函数等式を証明し、その二つの函数等式の比較から、軌道積分の対応を類推することにした。

2008年1月から1年間、日本学術振興会外国人特別研究員(欧米短期)として、University of Oklahoma の Kimball Martin が大阪市立大学に滞在することが決定していたので、相対跡公式についての研究実績のある彼との共同研究として、これらを実行した。

4. 研究成果

上記の研究方法を推進することによって、第3の相対跡公式に関して、ヘッケ環の単位元に関する基本補題を証明することに成功した。これはすでに、Kimball Martin との共著論文として、American Journal of Mathematics への掲載が決定済である。

その後、ヘッケ環の一般の元への基本補題の拡張についての研究を進めた。二次拡大が inert である場合については、ヘッケ環全体への拡張を証明することができた。

二次拡大が split する場合については、軌道積分を単位元に関する退化した軌道積分の一次結合で表した場合の項の数が著しく増えるために、それらを制御するのに若干手間取っており、まだ証明は完成していない。しかし、退化軌道積分はすべて計算済であり、この場合の証明も完成するのは、それほど遠い将来のことではないと思われる。

ヘッケ環全体への拡張を終えても、相対跡公式確立までには、まだ長い道のりが残されているが、それに向けての研究も開始した。具体的には、軌道積分が定める linear functional の間の等式(Abstract Matching), いくつかの素点について表現の尖点性を仮定した場合の相対跡公式の証明とその応用、等についての考察も Kimball Martin との共同研究として開始し、現在も着実に進行している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

① Masaaki Furusawa, Kimball Martin, 論文名: On central critical values of the degree four L-functions for $\mathrm{GSp}(4)$: The fundamental lemma. II, 掲載誌: American Journal of Mathematics, 掲載決定済み, 査読有

② Masaaki Furusawa, 論文名: New relative trace formula for the central critical values of the spinor L-functions for $\mathrm{GSp}(4)$ (joint work with Kimball Martin), 掲載誌: Proceedings of the National Institute of Mathematical Sciences, Volume 3, 141-152, 2008, 査読無

③ Atsushi Ichino, 論文名: Trilinear forms and the central values of triple product L-functions, 掲載誌: Duke Mathematical Journal, Volume 145, 281-307, 2008, 査読有

④ Kaoru Hiraga, Atsushi Ichino, Tamotsu Ikeda, 論文名: Formal degrees and adjoint γ -factors, 掲載誌: Journal of the American Mathematical Society, Volume 21, 283-304, 2008, 査読有

⑤ Atsushi Ichino, Tamotsu Ikeda, 論文名: On Maass lifts and the central critical values of triple product L-functions, 掲載誌: American Journal of Mathematics, Volume 130, 75-114, 2008, 査読有

⑥ Masaharu Kaneda, 論文名: Kapranov's tilting sheaf on the Grassmannian in positive characteristic, 掲載誌: Algebras and Representation Theory, Volume 11, 347-354, 2008, 査読有

⑦ Atsushi Ichino, 論文名: On the Siegel-Weil formula for unitary groups, 掲載誌: Mathematische Zeitschrift, Volume 255, 721-729, 2007, 査読有

⑧ Masaharu Kaneda, Jiachen Ye, 論文名: Equivariant localization of \overline{D} -modules on the flag variety of the symplectic group of degree 4, 掲載誌: Journal of Algebra, Volume 309, 236-281, 2007, 査読有

[学会発表] (計 1 件)

① 発表者: Masaaki Furusawa, 発表標題: New relative trace formula for the central critical values of the spinor L-functions for $\mathrm{GSp}(4)$ (joint work with Kimball Martin), 学会等名: International symposium on automorphic forms, L-functions, and Shimura varieties, 発表年月日: 2008 年 11 月 27 日, 発表場所: Inha University, Incheon, KOREA

6. 研究組織

(1) 研究代表者

古澤 昌秋 (FURUSAWA MASAOKI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 5 0 2 9 4 5 2 5

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

兼田 正治 (KANEDA MASAHARU)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 6 0 2 0 4 5 7 5

谷崎 俊之 (TANISAKI TOSHIYUKI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 7 0 1 4 2 9 1 6

市野 篤史 (ICHINO ATSUSHI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 4 0 3 4 7 4 8 0