

平成22年5月7日現在

研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2007～2009
 課題番号：19540054
 研究課題名（和文）ブローアップ代数の可換環論

研究課題名（英文） Study of blow-up rings

研究代表者

後藤 四郎 (GOTO SHIRO)

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：50060091

研究成果の概要（和文）：可換環論は代数学の一分野である。数や函数の集合のように、加法と乗法が定まっている空間の構造を、この2種の演算を手がかりに解明しようとする、抽象的な数学ではあるが、暗号理論のように、社会で実際に役に立つ内容も含んでいる。数学的には具体的な3課題を設定し、その解析に重点を置き、大きな成果が挙げられた。

研究成果の概要（英文）：Commutative Algebra is one of the branches of algebra, which works on the sets equipped with two binary operations, such that addition and multiplication, such as the sets of numbers and the sets of functions. The purpose is to explore the structure of these sets with view-point from two binary operations. This is a very abstract approach but it contains good applications, like cryptography, to real societies. I have posed three concrete problems and have been trying to solve them. I obtain rather excellent and big results, which I have reported in several conferences of abroad.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：可換環, Res 代数, 随伴次数環, Hilbert 函数, 重複度

1. 研究開始当初の背景

次数環 $R = R(I)$ に対し, $X = \{p \mid p \text{ は } R \text{ の次数素イデアルで, } R_p \text{ を含まない}\}$ ($R_p = \sum_{n \geq 0} I^n t^n$) とおくと, 空間 X は各点 p の局所環が

$$\mathcal{O}_{X,p} = \{a/s \mid a, s \text{ は環 } R \text{ の斉次元で, } s \text{ は } p \text{ に含まれず, } a \in R_{\deg s}\}$$

で定まるようなスキームの構造が入る。自然な射 $f: X \rightarrow \text{Spec } A$ は, 閉集合 $V(I)$ を中心とする $\text{Spec } A$ の blowing-up と呼ばれ, 幾何学的には非常に重要な対象であり, 深い研究がなされている。しかしながら, スキーム X のアフィンコーンの (斉次) 座標環である環 $R = R(I)$ に関する研究の歴史はさほど古くなく, 70 年代末に行われた研究代表者と下田保博の研究 [1] [2] [3] に始まるといって, さほど言い過ぎではない。

論文 [2] 内では, Cohen-Macaulay 局所環 A の極大イデアル \mathfrak{m} に関し, その Rees 代数 $R(\mathfrak{m})$ の Cohen-Macaulay 性と Gorenstein 性が, 随伴次数環 $G(\mathfrak{m})$ の Cohen-Macaulay 性・Gorenstein 性のほかに, 環 $G(\mathfrak{m})$ の (いわゆる後藤-渡辺の) 「 a -不変量」の挙動によって決定されることが, 初めて示されている。これらの知見は今日では, 池田信-N. V. Trung, 後藤-西田康二により, 一般のイデアルやイデアルの filtrations に関する定理に拡張されている。さらに, 随伴次数環の Cohen-Macaulay 性・Gorenstein 性は, 西田, 居相真一郎, W. V. Vasconcelos, B. Ulrich を初めとする多くの優れた研究者によって深く解析され, 満足すべき成果が得られてはいるが, 具体的に与えられたイデアル I に対し, その随伴次数環 $G(I)$ の Cohen-Macaulay 性や Gorenstein 性を判定する「**簡便かつ実際的な方法**」が既に確立されたかという点に

なると, 評価が分かれ, 不満が残らないわけではない。それだけではなく, Rees 代数の Buchsbaum 性判定については不可解な現象も多く, その研究は, 後藤・下田・西田・山岸規則久道の研究 [1], [3], [4], [5], [6], [7] を除くと, 依然, 緒についたばかりというか, 満足すべき状況にあるとはいいがたい。実際, Cohen-Macaulay 性の自然な拡張概念であるとはいえ, Buchsbaum 性には Cohen-Macaulay 性とは違って一筋縄では行かない面があり, 苦労も多いのであるが, しかしながら, 隔靴搔痒というか, これまでの研究に共通に見られる弱点は, 豊富な具体例がまだまだ十分には提供されていないことに起因すると, 研究代表者は考えている。

[1] S. Goto and Y. Shimoda, On Rees algebras over Buchsbaum rings, J. Math. Kyoto Univ., 20(1980), 691-708

[2] S. Goto and Y. Shimoda, On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 68(1982), 201-231, Marcel Dekker

[3] S. Goto, Blowing-up of Buchsbaum rings, London Mathematical Society Lecture Note Series, 72(1983), 140-162

2. 研究の目的

本研究の最終目標は, 第一に (1) Cohen-Macaulay 性や Gorenstein 性, 整閉性, 有理性など, blow-up 代数の各種環構造研究を深化させ, これを基盤に, (2) ドイツ・ベトナム・アメリカなどの (PD・学生を含む) 研究者との連携の下に, 広範な国際的ネットワークを組織し, 既に2回の実績がある Japan-Vietnam joint seminar を拡大発展させながら, 「**ブローアップ代数の可換環論**」の国際的展開を実現することにある。

3. 研究の方法

本研究は与えられた3年間に、次の4課題について成果を挙げることを目的とする。

課題 (1) Cohen-Macaulay 局所環 (A, \mathfrak{m}) 内の \mathfrak{m} -準素イデアル I に対し、随伴次数環 $G(I)$ が Buchsbaum 環となるための判定条件を求めよ。

課題 (2) 基礎環 A が正則局所環のときは、環 A 内の任意のイデアル I に対し、Rees 代数 $R(I)$ の Cohen-Macaulay 性と随伴次数環 $G(I)$ の Cohen-Macaulay 性は同値である。J. Lipman によって知られたこの結果を、Buchsbaum 性に拡張せよ。

課題 (3) (A, \mathfrak{m}) は Noether 局所環、 Q は環 A の巴系イデアルとし、 $I = Q :_A \mathfrak{m}^n$ ($n > 0$) とおく。

(a) イデアル Q が I の reduction となるための条件を、環 A と巴系イデアル Q の言葉で記述せよ。

(b) イデアル Q が I の reduction になるとき、その reduction 数 $r_Q(I) = \min\{n \geq 0 \mid I^{n+1} = QI^n\}$ を、環 A や巴系イデアル Q の不変量によって記述せよ。

(c) イデアル Q が I の reduction であるとき、blow-up 代数 $R(I)$ 、 $G(I)$ 、 $F(I)$ は、どのような環構造を持つか。Cohen-Macaulay 環、Gorenstein 環、あるいは Buchsbaum 環となるための条件を、環 A と巴系イデアル Q の言葉で記述せよ。

課題 (4) 与えられた Noether 局所環 (A, \mathfrak{m}) 内で $I = Q :_A \mathfrak{m}$ とおいたとき、等式 $I^2 = QI$ が成り立つような巴系イデアル Q の汎在性を確立し、blow-up 代数 $R(I)$ 、 $G(I)$ 、 $F(I)$ の環構造を解析せよ。

○ 平成19年度の研究計画

平成19年度は、課題 (3) と課題 (4) に主力を注ぐ。これらの課題は次の著しい結果

(定理 1) に触発されたものであって、このような定理がなぜ成り立つのか (証明ではなく) その理由を知りたいという動機に由来する。

定理 1 ([CHP], [CP], [CHV], [G]). Cohen-Macaulay 局所環 (A, \mathfrak{m}) 内に巴系イデアル Q をとり、 $I = Q :_A \mathfrak{m}$ とおく。このとき、次の3条件は互いに同値である。

(1) $I^2 \neq QI$ である。

(2) Q は環 A 内で整閉である。

(3) 局所環 A は正則であり、 A -加群 \mathfrak{m}/Q は単項生成である。

従って、Cohen-Macaulay 局所環 A が正則でないならば、環 A 内のいかなる巴系イデアル Q に対しても等式 $I^2 = QI$ が成り立ち、環 $G(I)$ と $F(I)$ は Cohen-Macaulay である。 $\dim A \geq 2$ ならば、Rees 代数 $R(I)$ も Cohen-Macaulay 環となる。

理解を深めようとする最も標準的な姿勢は、定理 1 内の「基礎環 A は Cohen-Macaulay である」という仮定を弱め、例えば Buchsbaum 環であると仮定したら、結論にどのような変更が必要となるかを調べることであろう。この問いに端を発した櫻井秀人 (研究分担者) との共同研究 [GSa1, GSa2, GSa3] に述べられた解を、一つの定理にまとめると、概ね下記のようなになる。

定理 2 ([GSa1, GSa2, GSa3]). 重複度 $e(A) \geq 2$ の Buchsbaum 局所環 (A, \mathfrak{m}) に対し、十分大なる自然数 $n \geq 0$ をとれば、冪 \mathfrak{m}^n に含まれるいかなる巴系イデアル Q についても、等式 $I^2 = QI$ が成り立ち、環 $R(I)$ 、 $G(I)$ 、 $F(I)$ はすべて Buchsbaum 環となる。但し $I = Q :_A \mathfrak{m}$ である。

課題 (4) は、定理 2 の知見をさらに拡張し、Noether 局所環 A 内には一般に、イデアル

$I = Q :_A \mathfrak{m}$ に対し、等式 $I^2 = QI$ が成り立つような巴系イデアル Q が汎在していること、少なくとも非常に沢山含まれていることを証明しようとするものである。局所環の内部構造だけではなく homology 代数的な性質や、巴系の組合せ論的な挙動が複雑に絡んだ問題であるが、櫻井秀人との予備的な共同研究によると、FLC 局所環については、この予想は正しいと思われる。

4. 研究成果

下記3課題の解析に重点を置いた。

課題 ① 与えられた Noether 局所環 $(A,$

m)内で m -準素イデアルのSally加群の構造を解析し, m -準素イデアルに随伴する各種 blow-up 代数の環構造解析の新たな指標を見出す。

課題② 与えられた Noether 局所環 (A, \mathfrak{m}) 内で巴系イデアル Q の第一 Hilbert 係数の挙動を解析し, 基礎環の Cohen-Macaulay 性と第一 Hilbert 係数の消滅性の関連を明らかにする。また, 与えられた Noether 局所環 (A, \mathfrak{m}) 内で巴系イデアル Q の第一 Hilbert 係数が巴系 Q の取り方によらないで定数となる, 従って環 A の不変量となる様な局所環の挙動を解析し, 基礎環の Buchsbaum 性と第一 Hilbert 係数の定置性の間の関連を明らかにする。

環太平洋アジア数学会議 (オーストラリア 7 月) と開催された V. W. Vasconcelos 記念研究集会 (ブラジル, 8 月) で, 課題②に関して得られた成果を発表した。課題①②について, 第 31 回可換環論シンポジウムでも成果発表講演を行った。また, IMVAST (Institute of Mathematics, Vietnamese Academy of Science and Technology, ベトナム) で開催された第 5 回 Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra (2010 年 1 月) で, 課題②について成果発表講演 (計 4 回) を行なった。これらの成果は, 計 19 編の論文に纏めてあり, 内 16 編が既に専門数学雑誌に公開済であって, 世界でも高い評価を得ている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 15 件)

以下全て, 査読有

- ① S. Goto, J. Horiuchi, and H. Sakurai, Quasi-socle ideals in Buchsbaum rings, Nagoya Math. J. (to appear)
- ② S. Goto and K. Ozeki, Buchsbaumness in

local rings possessing constant first Hilbert coefficients of parameters, Nagoya Math. J. (to appear)

- ③ L. Ghezzi, S. Goto, K. Ozeki, J. Hong, T.T. Phuong, and W. V. Vasconcelos, Cohen-Macaulayness versus the vanishing of the first Hilbert coefficient of parameter ideals, J. London Math. Soc. (to appear)
- ④ S. Goto, S. Kimura, T. T. Phuong, and H. L. Truong, Quasi-socle ideals and Goto numbers of parameters, Journal of Pure and Applied Algebra, 214 (2010) 501-511
- ⑤ S. Goto, Y. Horiuchi, and H. Sakurai, Sequentially Cohen-Macaulayness versus parametric decomposition of powers of parameter ideals, Journal of Commutative Algebra, 2 2010 (1), 37-54
- ⑥ S. Goto, S. Kimura, N. Matsuoka, and Tran Thi Phuong, Quasi-socle ideals in local rings with Gorenstein tangent cones, Journal of Commutative Algebra, 1(2009), 603-620
- ⑦ S. Goto, F. Hayasaka, and R. Takahashi, On vanishing of certain Ext modules, J. Math. Soc. Japan, 60(2008), 1045-1064
- ⑧ S. Goto, K. Nishida, and K. Ozeki, The structure of Sally modules of rank one, Mathematical Research Letters, 15(2008), 881-892
- ⑨ S. Goto, K. Nishida, and K. Ozeki, Sally modules of rank one, Michigan Math. J., 57(2008), 359-381
- ⑩ S. Goto, W. Heinzer, and M.-K. Kim, The leading ideal of a complete intersection of height two in a 2-dimensional regular local ring,

Communications in Algebra, 36(2008),
1901-1910

- ⑪ S. Goto, N. Matsuoka, and R. Takahashi, Quasi-socle ideals in Gorenstein local rings, J. Pure and Appl. Alg., 212 (2008), 969-980
- ⑫ S. Goto, S. Kimura, and N. Matsuoka, Quasi-socle ideals in Gorenstein numerical semigroup rings, J. Alg., 210(2007), 735-749
- ⑬ S. Goto and K. Yoshida, Buchsbaum homogeneous algebras with minimal multiplicity, J. Pure and Appl. Alg., 210(2007), 735-749
- ⑭ S. Goto and Y. Takayama, Stanley-Reisner ideals whose powers have finite length cohomologies, Proc. Amer. Math. Soc., 135 (2007), 2355-2364
- ⑮ S. Goto, W. Heinzer, and M.-K. Kim, The leading ideal of a complete intersection of height two, Part II, J. Alg., 312 (2007), 709-732

[学会発表] (計 15 件)

I. 研究集会招待講演

- ① 後藤四郎, Study of Hilbert functions and coefficients of parameters I, II, III, IV, The 5-th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, Institute of Mathematics Hanoi, January 5-9, (2010), Hanoi (Vietnam)
- ② 後藤四郎, Cohen-Macaulayness versus the vanishing of $e_{Q^1}(A)$, the first Hilbert coefficient of parameters, International Conference on Commutative Algebra, honoring Wolmer V. Vasconcelos, 10 August -14 August, (2009), Recife (Olinda, Brazil)

- ③ 後藤四郎, Cohen-Macaulayness versus the vanishing of $e_{Q^1}(A)$, the first Hilbert coefficient of parameters, PRIMA Congress, 6 July-10 July (2009), UNSW, Sydney (Australia)

- ④ 後藤四郎, The structure of Sally modules of rank, 第 53 回代数学シンポジウム (いわて県民情報交流センター(盛岡市アイーナ)), 2008 年 8 月 5 日

- ⑤ 後藤四郎, Integral closures of monomial ideals, The 3-rd Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, Institute of Mathematics Hanoi (Vietnam), December 3-7, 2007

- ⑥ 後藤四郎, Sally modules of rank one, Hilbert functions and syzygies in commutative algebra and combinatorics: a conference in honor of Juergen Herzog on the occasion of his 65th birthday, Cortona (Italy), September 16-22, 2007

- ⑦ 後藤四郎, Quasi-socle ideals in a Gorenstein local ring, the Conference Homological and Combinatorial Aspects in Commutative Algebra, July 5-10, 2007, Busteni, Romania

II. 可換環論シンポジウム講演

- ⑧ 後藤四郎・大関一秀, Cohen-Macaulayness versus vanishing of the first Hilbert coefficient of parameter ideals, 第 31 回可換環論シンポジウム, 大阪, 2009 年 11 月 24 日-27 日

- ⑨ 後藤四郎・木村了・Tran Thi Phuong, Quasi-socle ideals and Goto numbers of parameters, 第 31 回可換環論シンポジウム, 大阪, 2009 年 11 月 24 日-27 日

- ⑩ 後藤四郎・堀内淳・櫻井秀人, Quasi-socle ideals in Buchsbaum rings, 第31回可換環論シンポジウム, 大阪, 2009年11月24日-27日
- ⑪ 後藤四郎・木村了・松岡直之・Tran Thi Phuong, Quasi-socle ideals in local rings with Gorenstein tangent cones, 第29回可換環論シンポジウム, 名古屋, 2007年11月19日-22日

III. 日本数学会講演

- ⑫ 後藤四郎, 大関一秀, The structure of Sally modules of rank, 日本数学会春季年会 (近畿大学), 2008年3月26日
- ⑬ 後藤四郎, 木村了, 松岡直之, Quasi-socle ideals in numerical semi group rings, 日本数学会春季年会 (近畿大学), 2008年3月26日
- ⑭ 後藤四郎, 木村了, 松岡直之, Quasi-socle ideals in local rings with Gorenstein tangent cones, 日本数学会春季年会 (近畿大学), 2008年3月26日
- ⑮ 後藤四郎, 松岡直之, 高橋亮, Quasi-socle ideals in a Gorenstein local ring, 日本数学会秋季年会 (東北大学), 2007年9月23日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

後藤 四郎 (GOTO SHIRO)
明治大学・理工学部・教授
研究者番号: 50060091

(2) 研究分担者

櫻井 秀人 (SAKURAI HIDETO)
明治大学・研究・知財戦略機構・ポスト・ドクター
研究者番号: 00409450