

平成 22 年 6 月 11 日現在

研究種目：基盤研究 (C)
 研究期間：2007 ~ 2009
 課題番号：19540064
 研究課題名 (和文) シーアール構造特にシーアールワイル構造の研究
 研究課題名 (英文) Study of CR-Weyl structures
 研究代表者
 阪本 邦夫 (SAKAMOTO KUNIO)
 埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
 研究者番号：70089829

研究成果の概要 (和文)：複素空間型における実超曲面について、そこに誘導されるレビーチビタ接続と田中—ウェブスター接続との関係を得ることができた。この接続の差は (1,2) 型のテンソルであるが、これを第二基本テンソルを用いて表した。次に、一般の CR 多様体においてその超分布に横断的な直線バンドルが与えられたとき、CR-Weyl 接続を一意に定めるための曲率条件を見出した。この結果を実超曲面に適用することを現在研究中である。

研究成果の概要 (英文)：The first result is a proposition about the relation between the Levi-Civita and Tanaka-Webster connections of a real hypersurface in a complex space form. The difference is represented by the second fundamental tensor of the hypersurface. The second result is that, for a given line bundle transversal to the hyperdistribution on a CR manifold, the unique CR-Weyl connection is determined under some curvature conditions. The application to hypersurfaces is in studying.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何、CR 多様体、CR-Weyl 接続、実超曲面、田中—Webster 接続

1. 研究開始当初の背景

(1) 1907年に Poincare が複素数空間において、二つの実超曲面がどのような幾何学的条件をみたせば正則同型になるかという問題を提出し、Cartan はこの問題に対し低次元の場合に完全な解答を与えた。(Ann. Mat. 11(1932)、及び Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa 1(1932))。その後、田中(On pseudo conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables, J. Math. soc. Japan 14(1962)) が一般次元の場合に拡張し、Chern-Moser (real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math. 133(1974)) が異なる手法により同様の結果を得た。抽象化された CR 多様体の研究は Webster(1978)、阪本(代表者) - 竹村(1980)、Lee(1986)、Farris(1986)、Stanton(1992) 達によりさらに深く研究されてきた。

(2) 2005年に、代表者と大久保(CR Einstein-Weyl structures, Tsukuba J. Math. (2005))は Lee による pseudo-Einstein 構造と呼ばれる CR 多様体の Einstein 性を CR 不変な Einstein 性である CR Einstein-Weyl 構造に拡張した。大久保(CR Weyl geometry and connections of the canonical bundle, Kodai Math. J.(2005))は CR Einstein-Weyl 構造と標準直線バンドルのある種の接続とが一対一対応することを示し、これにより多くの CR Einstein-Weyl 構造の例を見出した。一方、Fefferman(1976)による円バンドル上の共形構造や CR 不変な曲線(chain)の研究がある。CR -Einstein -Weyl 多様体上のこの共形構造の chain の研究はまだなされていない。

(3) Fefferman が 1976年に複素 Euclid 空間における強擬凸実超曲面と circle との

直積空間に Lorentz 計量を導入し chain を研究した。その後、この結果を Lee(1986)、Farris(1986),Graham(1986),Stanton(1992)らが一般の CR 多様体に拡張した。本研究はこれらの研究をより幾何学的により一般に論じようとするものである。一方、Weyl 多様体の研究は Gauduchon を中心として多くあるが、その CR 版は過去にない。本研究は、Weyl 多様体の研究と CR 多様体のそれとの融合と考えられる。

2. 研究の目的

(1) まずこの期間中の目標は次のようなことである。複素空間型またはより一般にケーラー空間における非退化実超曲面のレビチビタ接続と CR-Weyl 接続との関係を明らかにすることが目的である。すなわち、実超曲面に自然に定められる超分布に横断的な直線バンドルが 2 種類考えられるが、垂直な直線バンドルに対応する CR-Weyl 接続を見出すことと、さらにもう 1 種類の直線バンドルに対して田中 - Webster 接続を第二基本テンソルで記述することである。この 2 種類の接続の関係についても考察することが目標である。

(2) 全体構想としては、CR 多様体上の自然な円バンドルに導入される共形構造と CR Weyl-Einstein 構造との関係を研究する事である。具体的には、CR 多様体 M が強擬凸であるとき、この円バンドル空間上には、田中 - Webster 接続の接続形式とスカラー曲率を用いて Lorentz 計量が構成されることが知られている。

① この結果と同様に、CR Weyl 接続と円バンドルに自然に誘導される接続を利用することにより、バンドル空間上に、擬 Riemann 計量からなる共形構造が構成で

きることを明らかにしたい。

② この共形構造から定義される Weyl 共形曲率テンソルと M 上の CR 不変なテンソルである Bochner 曲率テンソルとの関係を論じたい。

③ この円バンドルには自然な複素構造が定義できるが、これが積分可能であるための必要十分条件を円バンドルに誘導される接続の曲率テンソルにより記述したい。

④ M が CR Einstein-Weyl 多様体になるための必要十分条件を円バンドル上の共形構造についての条件として記述したい。

⑤ Chern-Moser が定義した CR 不変な曲線である chain は、上記 Lorentz 計量のある特殊な測地線を M に射影したものであることが知られているが（上記 Farris, Stanton による結果）、この曲線の性質には興味あるものがある。具体的な実超曲面については、chain がスパイラルに臍点に吸い込まれていくという現象を Fefferman は見出している。臍点は抽象的な CR 多様体でも定義でき、chain のこのような現象が一般的なものであるのかどうかを考察したい。

⑥ 目標は同値問題である。Webster はある種の具体的な実解析的実超曲面について Bochner 曲率テンソルを計算し、超球面と CR 同型（実超曲面の近傍から超球面の近傍への正則同型の制限）であることを示している。このことをより一般的な実超曲面、例えば、Reinhardt 超曲面に拡張できるかどうかを研究することも目標の一つである。

3. 研究の方法

(1) CR 幾何、部分多様体論、複素多様体論の研究会、学会に参加、出席する。

(2) 幾何学関係図書の充実を図ること。

(3) パソコン、プリンター、ソフトの充実を図った。

(4) 分担者、連携研究者とのセミナーを通じ情報を交換を行った。特に、分担者の長瀬教授は積分可能でない概 CR 構造を研究対象としており有益な議論を行った。

4. 研究成果

(1) ケーラー空間、特に複素空間型における実超曲面には自然な CR 構造が定義される。同時に contact metric 構造が定まる。まずこれらに関する（すでに知られていることであるが）種類の公式をのちの研究の沿う形で準備を行った。

(2) これらのことからレビ形式が第二基本形式の $(1, 1)$ 部分であることが分かった。さらに、超分布に垂直な正規化されたベクトル場とレビ形式との内積が第二基本形式により記述されることが示せた。

(3) 次に超分布に垂直な直線バンドルに適用することを目的とし、超分布に横断的な直線バンドルに付随する最も自然な CR Weyl 接続の研究を行った。ここで最も自然とは何かの問題になるが、超曲面の場合には最も自然である条件がその超曲面に何の条件も課さないことを目標とした。結果は横断的な直線バンドルに含まれる正規化されたベクトル場に関するリー微分を用いて 1 次微分形式を定め、これにより CR Weyl 接続を定義すればよいことが分かった。これを超曲面の場合の垂直バンドルに適用した。さらに、この CR Weyl 接続と田中 Webster 接続との関係を調べた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

1, T. Mizutani, Lie algebroids associated

with deformed Schouten bracket of
2-vector fields, Progr. Math., 査読有, 252,
2007, pp.147-160

2, M. Nagase, Twistor spaces and the
general adiabatic expansions, J. Funct.
Anal.,
査読有, 251, 2007, pp.680-737

〔学会発表〕 (計 0 件)

〔図書〕 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等
なし。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

阪本 邦夫 (SAKAMOTO KUNIO)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：70089829

(2) 研究分担者

水谷 忠義 (MIZUTANI TADAYOSHI)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：20080492
長瀬 正義 (NAGASE MASAYOSHI)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：30175509

(3) 連携研究者

福井 敏純 (FUKUI TOSHIKUNI)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：90218892
酒井 文雄 (SAKAI FUMIO)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：40036596
江頭 信二 (EGASHIRA SHINJI)
埼玉大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号：00261876

