様式Ｃ-7-2

自己評価報告書

平成２２年　４月２０日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：平成 2007 年度 〜 2010 年度
課題番号：19540067
研究課題名（和文）　リッチ平坦多様体とモーメント写像の幾何学

研究課題名（英文）　Geometry of Ricci-flat manifolds and moment maps

研究代表者
今野　宏（KONNO HIROSHI）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号： 20254138

研究代表者の専門分野： 微分幾何学
科研費の分科・細目： 数学・幾何学
キーワード： 微分幾何，シンプレクティック幾何

１．研究計画の概要

ハイパーケーラーモーメント写像のノルムの２乗をモース関数としてモース理論を適用することにより，ハイパーケーラー商のトポロジーを調べることを目標としている．この研究において，第１の課題は，この関数はプロパーでないにもかかわらず，この関数の勾配の精密な評価をすることによりプロパーである場合と同様にモース理論を適用できることを示すこと，第２の課題は，モース理論を適用してベッチ数やコホモロジー環を決定することである．

シンプレクティック多様体を幾何学的量子化する際に偏極という付加的なデータが必要である．その中で，実偏極と複素偏極が重要である．これらの偏極はまったく見かけ上性質の異なるものであるが，それぞれの偏極を用いて量子化した結果は同じになる，という指導原理がある．仮に，前量子直線束の正則切断が，複素偏極を実偏極に近づけてゆくと，ボーア・ゾンマーフェルト軌道と呼ばれるあるラグランジュ部分多様体に台を持つデルタ関数に収束してゆく，ということが成立すれば，この仮説は上記の指導原理に概念的な説明を与えることになる．この仮説を検証することが目標である．

２．研究の進捗状況

ハイパーケーラー商のトポロジーのモース理論による研究についてであるが，上記の第１の課題については，まず，トーリックハイパーケーラー多様体（正確には軌道体）についてはは完全に解決した．すなわち，ハイパーケーラーモーメント写像のノルムの２乗という関数の臨界点集合を決定し，この関数の臨界点集合（これは非コンパクトである）の近傍での精密な勾配評価を与えた．さらに，臨界点集合の近傍の補集合では，勾配が一様に退化しないことを示した．その後，この方法をトーラスによるハイパーケーラー商の場合に一般化して，ある技術的な仮定の下で示すことができた．

続いて上記の第２の課題についてであるが，まず，トーリックハイパーケーラー多様体の場合にベッチ数とコホモロジー環の構造を決定した．これらは，すでにトーリックハイパーケーラー多様体のトーラス作用を用いて決定されていたが，我々の方法はそのトーラス作用を使用しないので，より一般的な枠組みでベッチ数を計算する手法を与えたことになる．その後，これらの方法は，トーラスによるハイパーケーラー商の場合に一般化することに成功した．ベッチ数については完全な一般化であるが，コホモロジー環については，ある条件のもとで一般化された．

幾何学的量子化，特に実偏極とケーラー偏極の関係を研究は Mark Hamilton 氏と共同で行った．トーリック多様体の場合には，Baier らにより研究計画の欄の述べた仮説が正しいことが示されている．本研究では，この仮説を旗多様体の場合に示すことにほぼ成功した．すなわち，旗多様体のシンプレクティック構造を固定したときに，それと両立する複素構造の族で実偏極に収束するものがほぼ構成できた．アイディアは，旗多様

体のトーリック退化と，Baier らによるトーリック多様体の方法を組み合わせることである．

３．現在までの達成度

②おおむね順調に進展している．

研究期間に初年度の末から２年目の初めにかけて，トーリックハイパーケーラー多様体に上述のモース理論を適用できることを示し，さらに，このモース理論を適用することにより，そのトポロジーを調べることに成功した．これ以前は，トーリックハイパーケーラー多様体のトーラス作用を用いてそのトポロジーを研究する，というようにこの多様体のきわめて特殊な性質を手掛かりとして研究していたが，本研究により，より一般の枠組みの中で研究できるようになった，という点で重要である．また，トーリックハイパーケーラー多様体のコホモロジー環の表示は，以前から２通りの表示があることが知られていた．ひとつはトーリックハイパーケーラー多様体のトーラス作用を用いて得られる表示で，幾何学的意味がよくわかるものであった．ふたつめの表示は，ひとつめの表示からある代数的な操作により得られるもので，実用上大変便利であるが，その幾何学的意味がよくわかっていなかった．このモース理論により得られた表示はふたつめの表示で，その結果，ふたつめの表示の幾何学的意味が明らかになった．

以上の研究成果により，トーリックハイパーケーラー多様体の場合でさえ，このモース理論を適用する方法の有効性が確かめられた．次の課題はこの方法をより一般の対象にまで拡張することである．研究計画の欄で述べたように，この研究には，ふたつの課題があるが，第２の課題についてはある条件のもとで一般化された．この条件は，今回の研究ではじめて認識された条件で，われわれの結果は，コホモロジー環が計算できるための理由を明らかにしたと考えられる．第１の課題が残されている．

幾何学的量子化の研究については，研究期間の２年目の末に，着想を得た．その後，着想を実行するために必要な問題を着実に定式化して，解決している段階である．

モース理論についての第１の課題の克服に時間がかかっているが，総じて言えば着実に研究は進展していると考える．

４．今後の研究の推進方策

モース理論の第１の課題については，研究の進捗状況の欄で述べたように，ある技術的な仮定のもとに，モース理論が適用できることはがわかっているが，研究代表者は，その仮定は常に成立していると考えている．これを証明することが大きな目標である．まず，この問題をトーラスによるハイパーケーラー商の典型的な例である多角形のモジュライ空間のハイパーケーラー類似物に対して考えたい．この具体例を通して，ハイパーケーラーモーメント写像のノルムの２乗が臨界点集合の近傍で退化する様子を詳細に調べてゆきたい．

幾何学的量子化については，今までの研究を着実に続けてゆきたい．具体的には，今年度までの研究で，複素構造が実偏極に収束するものは構成できた．次の課題は，その複素構造を変形したときに，前量子直線束の正則切断がどのように変化するかを調べることである．そのためには，シンプレクティック幾何の対象と複素幾何の対象のさまざまな同一視を構成することが必要になるが，その同一視を現在実行中であり，それを継続してゆきたい．近年，複素多様体のトーリック退化の理論が盛んに研究されているが，本研究はそのシンプレクティック幾何的側面の研究として位置づけることができ，この方向で本研究を発展させたい．

５．代表的な研究成果
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① H.Konno, Morse theory for toric hyperkahler orbifolds, in Lecture Note Series in Mathematics, Osaka Univ., vol.9, 217-226, 2008, 査読無
② H.Konno, Geometry of toric hyperkahler varieties, Contemporary Math., vol.480, 241-260, 2008, 査読有

〔学会発表〕（計５件）

① H.Konno, Morse theory for abelian hyperkahler quotients, East Asian Symplectic Conference 2009, 2009 年 5 月 9 日, Academia Sinica, Taiwan；第 55 回幾何学シンポジウム, 2008 年 8 月 22 日, 弘前大学；Complex Geometry in Osaka, 大阪大学, 2007 年 11 月 4 日
② 今野宏, ハイパーケーラー商の幾何, 研究集会 幾何構造の諸相, 2009 年 3 月 9 日, 名城大学
③ H.Konno, Geometry of toric hyperkahler varieties, Symplectic Geometry, 2007 年 7 月 26 日, 京都大学数理解析研究所

〔その他〕
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/teacher/konno.html