様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月３０日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007 ～ 2010
課題番号：１９５４００６７
研究課題名（和文）　リッチ平坦多様体とモーメント写像の幾何学

研究課題名（英文）　Geometry of Ricci-flat manifolds and moment maps

研究代表者
今野　宏（ KONNO HIROSHI）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：２０２５４１３８

研究成果の概要（和文）：　トーラスによるハイパーケーラー商のトポロジーを研究した．ハイパーケーラーモーメント写像のノルムの２乗をモース関数としてモース理論が適用できることをある条件の下で示した．その結果，ベッチ数の公式を導き，ある条件の下でコホモロジー環を決定した．旗多様体の幾何学的量子化を研究した．旗多様体の標準的なケーラー偏極を始点とするケーラー偏極の１パラメーラ-族で，Gelfand - Cetlin 系の定める実偏極に量子レベルで収束するものを構成した．

研究成果の概要（英文）：　We studied the topology of hyperkähler quotients by tori. We showed that we can take the norm square of the hyperkähler moment map as a Morse function under certain conditions. As a result we derived a formula for the Betti numbers and, under certain conditions, determined the cohomology ring. We also studied geometric quantization of flag manifolds. We constructed the one parameter family of Kähler polarization starting from the standard one and converging to the real polarization coming from the Gelfand-Cetlin integrable system at quantum level.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	800,000	240,000	1,040,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分幾何，シンプレクティック幾何

１．研究開始当初の背景

(1) ハイパーケーラー商のトポロジー

　さまざまな幾何学的な対象のモジュライ空間は代数幾何学的な（幾何学的不変式論による）商空間として構成される．これらは同時に，シンプレクティック商というシンプレクティック幾何における商空間として構成される．そのため，これらの商空間は，代数幾何的手法，シンプレクティック幾何的手法という全く異なる２つの方法を用いて研究することができ，深い結果が得られていた．

　特に Kirwan は，モーメント写像のノルムの２乗をモース関数として適用した．これ

により，商をとる前の空間の同変コホモロジー環からシンプレクティック商の通常のコホモロジー環への Kirwan 写像と呼ばれる環準同型写像が全射であることを証明した．この Kirwan 写像の全射性を基礎として，シンプレクティック商のベッチ数やコホモロジー環が調べられていた．

ハイパーケーラー商と呼ばれるシンプレクティック商の類似物は，シンプレクティック商と同様に重要な対象である．シンプレクティック商の場合の Kirwan 写像の類似物であるハイパーケーラー Kirwan 写像が定義できるが，その非コンパクト性のため，一般にハイパーケーラー Kirwan 写像の全射性が成立するかどうか知られていなかった．トーリックハイパーケーラー多様体の場合については研究代表者の以前の研究によりコホモロジー環の構造が決定されていて，その結果パーケーラー Kirwan 写像の全射性が成立することはわかっていた．けれどもその証明方法はトーリックハイパーケーラー多様体の特殊性を利用したもので，その他のハイパーケーラー商には適用できないものであった．

(2) 幾何学的量子化

シンプレクティック多様体を幾何学的量子化する際に偏極という付加的なデータが必要である．偏極とは接束（の複素化）のラグランジュ部分束で，括弧積に関して閉じているものである．シンプレクティック多様体を古典力学の相空間とみなすとき，その幾何学的量子化とはシンプレクティック多様体上の直線束（前量子直線束と呼ばれる）の切断で，偏極方向への共変微分が０となるもの全体のなす空間を量子ヒルベルト空間とする量子系を構成する手続きである．

偏極にはさまざまなものがあるが，その代表的なものにシンプレクティック構造と整合的な複素構造から定まるケーラー偏極がある．ケーラー偏極に対する量子ヒルベルト空間は，（ケーラー偏極から定まる）前量子直線束の正則構造に関する正則切断の空間である．その他の偏極の例は，シンプレクティック多様体のラグランジュファイブレーションから定まる実偏極である．実偏極に対する量子ヒルベルト空間の基底は，Bohr – Sommerfeld ファイバーと呼ばれる実偏極を定めるラグランジュファイブレーションの特別なファイバーと対応している．このケーラー偏極と実偏極はまったく見かけ上性質の異なるものであっても，それぞれの偏極を用いて幾何学的量子化を実行した結果は同じになる，という物理からの指導原理があり，いくつかの実例でこの現象が観察されていた．

特に，旗多様体は自然な複素構造を持つので，標準的なケーラー偏極を持つ．Guillemin – Sternberg は旗多様体に Gelfand – Cetlin 系と呼ばれるラグランジュファイブレーションの定める実偏極を構成し，これら２種類の偏極により得られた量子ヒルベルト空間の次元が等しいことを，両者の次元をそれぞれ計算することにより示している．

一方，T.Baier, C.Florentino, J.M.Mourao and J.P.Nunes は，トーリック多様体の場合に，トーラス作用から定まる実偏極に「収束する」ケーラー偏極の１パラメーター族を構成した．

２．研究の目的

(1)　ハイパーケーラー商のトポロジーについての一般論を建設する．特にハイパーケーラー Kirwan 写像の全射性の研究を行い，それを基礎としてハイパーケーラー商のベッチ数やコホモロジー環を調べる．

(2)　実偏極とケーラー偏極はまったく見かけ上性質の異なるものであるが，それぞれの偏極を用いて幾何学的量子化を実行した結果は同じになる，という物理学的な考え方に基づく指導原理を数学的に説明する．

３．研究の方法

(1)　ハイパーケーラーモーメント写像のノルムの２乗をモース関数としてモース理論を適用することにより，ハイパーケーラー商のトポロジーを調べる．この研究において，第１の課題は，この関数はプロパーでないにもかかわらず，この関数の勾配の精密な評価をすることによりプロパーである場合と同様にモース理論を適用できることを示すことである．この帰結としてハイパーケーラー Kirwan 写像の全射性が示される．第２の課題は，モース理論を適用して，ベッチ数やコホモロジー環を決定することである．

(2)　シンプレクティック多様体のケーラー偏極の１パラメーター族が与えられたとき，各ケーラー偏極に応じて定まる前量子直線束の正則切断の１パラメーター族が，ある実偏極に関する Bohr – Sommerfeld ファイバーに台を持つデルタ関数に収束してゆくとする．このとき，このケーラー偏極の族は上記の実偏極に量子レベルで収束するというこ

とにする．実偏極に対して，その実偏極に量子レベルで収束するケーラー偏極の族が存在することが示されれば，研究目的で述べた指導原理は数学的あるいは概念的に説明が与えられることになる．トーリック多様体に対しては，Baier らによりトーラス作用から定まる実偏極に量子レベルで収束するケーラー偏極の１パラメーター族を構成された．けれども，その構成は，トーリック多様体のシンプレクティックポテンシャルという，トーリック多様体特有の幾何に基礎とする方法を用いて行われた．目標は，トーリック多様体でないシンプレクティック多様体に対して，Baier らの方法を拡張することである．

４．研究成果

(1) 「研究の方法」で述べた第１の課題については，まず，トーリックハイパーケーラー多様体（正確には軌道体）については完全に解決した．すなわち，ハイパーケーラーモーメント写像のノルムの２乗という関数の臨界点集合を決定し，この関数の臨界点集合（これは非コンパクトである）の近傍での精密な勾配評価を与えた．さらに，臨界点集合の近傍の補集合では，勾配が一様に退化しないことを示した．この結果，トーリックハイパーケーラー多様体に対するハイパーケーラーKirwan 写像の全射性が証明された．この結果自身は，「研究開始当初の背景」で述べたように，研究代表者によりトーリックハイパーケーラー多様体の特殊性を用いて示されていたが，今回の証明はその特殊性を用いない一般的な枠組みのもとで得られた，という点が大変重要である．

その後，この方法をトーラスによるハイパーケーラー商の場合に一般化して，ある技術的な仮定の下で示すことができた．研究代表者は，その仮定は常に成立していると考えている．これを証明することが大きな目標であるが，決定的な結果を得ることができなかった．

「研究の方法」で述べた第２の課題については，まず，トーリックハイパーケーラー多様体の場合にベッチ数とコホモロジー環の構造を決定した．これらは，すでにトーリックハイパーケーラー多様体の特殊性を用いて決定されていたが，我々の方法はその特殊性を使用しない，より一般的な枠組みでベッチ数を計算する手法を与えたことになる．しかも，ベッチ数の表示は，従来のもとのは異なる新しいものである．従来の表示は通常のトーリック多様体のベッチ数の表示とよく似たものである．両者の同値性は複雑な組み合わせ論的な議論によりあたえることができるが，新しい表示はハイパーケーラー商であることを鮮明にした表示であるという利点を持っている．このような利点を持った表示は今回新たに発見されたものである．

また，トーリックハイパーケーラー多様体のコホモロジー環の表示は，以前から２通りの表示があることが知られていた．ひとつはトーリックハイパーケーラー多様体の特殊性を用いて得られる表示で，通常のトーリック多様体のコホモロジー環の表示とよく似た明確な幾何学的意味を持つものであった．ふたつめの表示は，ひとつめの表示からある代数的な操作により得られるもので，実用上大変便利であるが，その幾何学的意味がよくわかっていなかった．このモース理論により得られた表示はふたつめの表示で，その結果，ふたつめの表示の幾何学的意味が明らかになった．以上の研究成果により，トーリックハイパーケーラー多様体の場合でさえ，このモース理論を適用する方法の有効性が確かめられた．

その後，これらの方法は，トーラスによるハイパーケーラー商の場合に一般化することに成功した．ベッチ数のトーリックハイパーケーラー多様体に対して今回の研究で得られた新たな表示は，トーラスによるハイパーケーラー商の場合対して（第１の課題が克服されれば）完全な一般化されることがわかった．コホモロジー環の表示に関しては，（第１の課題が克服されれば）ある条件のもとで一般化された．この条件は，今回の研究ではじめて認識された条件で，われわれの結果は，コホモロジー環が計算できるための理由を明らかにしたと考えられる．

以上のように，ハイパーケーラーモーメント写像のノルムの２乗という関数をモース関数としてハイパーケーラー商のトーラスによるトポロジーを調べることが大変有効であることが今回の研究を通して明らかになってきた．けれども，第１の課題を何の条件も課さずに解くことが必要で，依然としてこの問題が残されている．今後のこの問題へのアプローチとして，まず具体例についてハイパーケーラーモーメント写像のノルムの２乗が臨界点集合の近傍で退化する様子を詳細に調べることが必要と思われる．具体例として，トーラスによるハイパーケーラー商の典型的な例である多角形のモジュライ空間のハイパーケーラー類似物が適当なものと思われる．あるいは，大きく方針転換をして，ハイパーケーラーモーメント写像ではなく，単に実モーメント写像のノルムの２乗をモース関数としてモース理論を適用する

ことが考えられる．この場合には，広いクラスで第１の課題が克服されることが示されるが，このモース関数はハイパーケーラー構造とは相性がよくないので，第２の課題に難点がある．

(2)　Mark D. Hamilton 氏と共同で，旗多様体の標準的なケーラー偏極を変形してGelfand－Cetlin 系の定める実偏極に量子レベルで収束するケーラー偏極の１パラメーター族を構成した．基本的な方針は，旗多様体のトーリック退化と，Baier らによるトーリック多様体の方法を組み合わせることである．組み合わせを実行するために，トーリック退化の理論をシンプレクティック構造を保ったまま行うように理論を再構築すること，Baier らの理論の枠組みを特異点を持った部分多様体の変形に拡張すること，また，組み合わせるときに生じる誤差項の精密な評価をすることも併せて必要となり，これらを実行した．

この結果は論文「Convergence of Kahler to real polarizations on flag manifolds via toric degenerations」にまとめられた．(学術雑誌に投稿中，また，プレプリントサーバーに arXive:1105.0741 [math.SG] として公開中)

上記の結果は，以下のような新たな問題を提起することになる．表現論において，表現空間の標準基底が知られているが，上の結果は標準基底の新しい幾何学的解釈を与える可能性があり，今後の研究が期待される．また，上の方法は旗多様体にとどまらず，トーリック退化を許容するもっと一般のシンプレクティック多様体に拡張される．さらに，多くのシンプレクティック多様体には複数の異なるトーリック退化が存在するので，これらの関係を調べることも興味ある問題である．

(3) 上記の具体的な研究成果の他に，この研究期間中に「東京幾何セミナー」という公開セミナーを東京工業大学の二木昭人教授と共同で主催した．この研究期間中に延べ４７名の講師による講演を企画した．このセミナーの数名の講演者の旅費に科学研究費補助金を使用させていただいた．このセミナーを通して上記の研究に必要な知識を得たばかりでなく，今後の研究へのさまざまな展望を得た．また，セミナーの講演者や参加者とさまざまな議論をし，多くの問題を共有できたことは大変有益であった．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計２件)

① <u>H.Konno</u>, Morse theory for toric hyperkähler orbifolds, in Lecture Note Series in Mathematics, Osaka Univ., vol.9, 217-226, 2008, 査読無

② <u>H.Konno</u>, Geometry of toric hyperkähler varieties, Contemporary Math., vol.480, 241-260, 2008, 査読有

〔学会発表〕(計６ 件)

① <u>H.Konno</u>, Convergence of Kähler polarizations to real polarizations on flag varieties, 第16回複素幾何シンポジウム, 菅平, 2010年10月21日

② <u>H.Konno</u>, Morse theory for abelian hyperkähler quotients, East Asian Symplectic Conference 2009, 2009年5月9日, Academia Sinica, Taiwan

③ <u>今野宏</u>，ハイパーケーラー商の幾何，研究集会 幾何構造の諸相，2009 年 3 月 9日，名城大学

④ 今野　宏，Morse theory for abelian hyperkähler quotients，第55回幾何学シンポジウム，2008年8月22日，弘前大学

⑤ <u>H.Konno</u>, Morse theory for abelian hyperkähler quotients, Complex Geometry in Osaka, 大阪大学, 2007 年11月4日

⑥ <u>H.Konno</u>, Geometry of toric hyperkähler varieties, Symplectic Geometry, 2007年7月26日，京都大学数理解析研究所

〔その他〕
ホームページ等
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/teacher/konno.html

６．研究組織
(1)研究代表者
今野 宏 (KONNO HIROSHI)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：２０２５４１３８

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし