

平成 21 年 5 月 15 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2008

課題番号：19540069

研究課題名（和文）結び目・3次元多様体の量子不変量の数論的性質の研究とその応用

研究課題名（英文）Research of number theoretic properties of quantum invariants of knots and 3-manifolds and its application

研究代表者

氏 名：高田 敏恵（TAKATA TOSHIE）

所 属：新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号：40253398

研究成果の概要：

ザイフェルト球面に対する、B、C、D型リー環に付随する摂動的不変量の具体的な計算を実行することにより、有理ホモロジー球面の摂動的不変量とmatrix integralとの関連を調べ、ザイフェルト球面のLMO不変量の次数が低い部分について、ベルヌーイ数に関連した公式を与えた。さらに、レンズ空間について、B、C、D型リー環に付随する摂動的量子不変量と同値と考えられるfree energy の明確な公式を与え、その解析的性質を調べた。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	1,800,000	540,000	2,340,000

研究分野：位相幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：3次元多様体、結び目、量子不変量

## 1. 研究開始当初の背景

## (1) 結び目の量子不変量について

代表者は、長年、量子不変量の研究に従事しており、また、「体積予想」に関連して結び目の双曲構造が反映する形で多くの具体的な結び目の colored Jones polynomial の公式を求めた。また、村上斉、村上順、岡本美雪、横田佳之らとの研究によって、いくつかの双曲結び目について、その体積予想が

正しいことを示唆する結果を与えており、体積予想について数値実験を利用する具体的手法を得ていた。更に連携研究者の樋上もある双曲結び目のクラスの colored Jones polynomial について「体積予想」との関連についての結果、トーラス結び目の colored Jones polynomial と数理物理モデルとの関係を通して、新たな q-series についての関係式を得ており、それを保型形式と関連付ける結果を得ていた。

## (2) 3次元多様体の量子不変量について

代表者は、これまでの研究において、ザイフェルト多様体に対する、任意の有限次元複素単純リー環に付随する量子不変量について明確な公式を与えた。その証明の鍵は、量子不変量にあらわれる項の周期性である。得られた公式は、まさに、Lawrence, Zagier, 樋上が量子  $SU(2)$  不変量と保型形式を関連付けた公式をそのまま一般化した形になっており、彼らの結果を他のリー環に拡張できると予測された。

また、リー環に量子不変量の数論的漸近展開から、摂動的不変量が得られる。これは、量子不変量の漸近挙動における自明な接続への寄与を与えると予想されている。ザイフェルト多様体に対する量子不変量の漸近挙動において、 $sl_2$  に付随した摂動的不変量、いわゆる大槻不変量について、樋上から得られた数論的結果をもとに、 $sl_3$  に付随した摂動的不変量、量子  $PSU(3)$  不変量についても、それは、 $sl_3$  に付随した量子不変量の漸近挙動において自明な接続に対応し、 $L$ -function に関連して書くことができると予想された。

さらに、代表者は homology 3-sphere の一つのクラスである Brieskorn homology 3-sphere に対して  $PSU(3)$  不変量の明確な公式を求めた。これは、上記予想の研究において具体的な数値実験に利用できると考えられた。

## 2. 研究の目的

### (1) 結び目の量子不変量について

連携研究者樋上と Kirillov によって得られた、トーラス結び目の colored Jones polynomial と数理論理モデルの指標、保型形式との関連が、他の結び目の量子不変量、他のリー環に付随した量子不変量について成立するか調べる。トーラス絡み目の量子不変量については、その保型形式との関連から、その漸近挙動がえられる。双曲結び目の量子不変量の漸近挙動の解明は、体積予想と関連して非常に重要であり、保型形式との関連を調べることにより、その解明をめざす。

### (2) 3次元多様体の量子不変量について

Zagier-Lawrence, 連携研究者樋上によって得られているザイフェルト多様体の量子  $SU(2)$  不変量と保型形式との関係、 $L$  関数と関連して現れる大槻不変量につい

ての結果について、他の3次元多様体、量子不変量への拡張を考え、それらの数論的性質、保型性、 $L$ -関数との関連とともに、幾何学的性質を調べる。

樋上は、得られたザイフェルト多様体の量子  $SU(2)$  不変量と保型形式との関係を利用することによって、その漸近挙動を与えた。3次元多様体の量子不変量の漸近挙動の解明も、Witten 予想とも関連して重要であり、量子不変量と保型形式との関係などを調べることにより、漸近挙動についてもその解明をめざす。

## 3. 研究の方法

### (1) 結び目の量子不変量について

代表者による2橋結び目と呼ばれる結び目のクラスに対する colored Jones polynomial の公式、連携研究者樋上によるトーラス結び目の colored Jones polynomial と保型形式と関連付ける結果の他のリー環に付随した量子不変量への拡張を試みる。また、葉広によって発見された colored Jones polynomial の表示法による、ツイスト結び目の公式を color について和をとった式が保型性をもつことを連携研究者の樋上が発見した。これが2橋結び目についても成り立つのか調べる。またこれを手がかりに、現れる不変量の列についての数論的解析を行い、結び目の colored Jones polynomial と保型形式との関連を調べる。

### (2) 3次元多様体の量子不変量について

代表者は Hansen とともに、量子不変量に現れる項の周期性を利用し、ザイフェルト多様体に対する、任意の有限次元複素単純リー環に付随する量子不変量について明確な公式を与えた。それは、Lawrence, Zagier, 樋上 が量子  $SU(2)$  不変量と保型形式を関連付けた公式をそのまま一般化した形になっている。その公式をもとに最近得られた摂動的  $PSU(3)$  不変量の結果と、 $L$  関数の関連を調べ、まず量子  $SU(3)$  不変量への拡張を考える。更に、Lawrence, Zagier, 樋上らの量子  $SU(2)$  不変量と保型形式の関連について、他の多様体、他の量子不変量への拡張を試みる。

また、代表者は前年度の研究によって、任意の  $n$  に対して、ザイフェルト多様体に対する、摂動的  $PSU(n)$  不変量を計算する簡単なアルゴリズムを発見した。その公式は、

樋上 が ザイフェルト多様体の中の一つのクラスである Brieskorn homology 3-sphere の量子  $SU(2)$  不変量と保型形式を関連から得た摂動的  $PSU(2)$  不変量(即ち大槻不変量) に似た形をしている。その公式をもとに摂動的  $PSU(n)$  不変量と、 $L$  関数の関連を調べ、量子  $SU(n)$  不変量の保型性を考察する。更に、量子  $SU(2)$  不変量と保型形式の関連について、他の多様体、他の量子不変量への拡張を試みる。また、得られる摂動的  $PSU(n)$  不変量の公式から、連結な 3 価頂点グラフの基底がわかる次数については、ザイフェルト多様体の LMO 不変量が得られる。これをもとに LMO 不変量と保型形式との関連を調べる。

#### 4. 研究成果

##### (1) 結び目の量子不変量について

結び目の色つきジョーンズ多項式の 1 の冪根での値の漸近的な振る舞いは、結び目補空間の双曲体積と関連するという体積予想に関連して、以下の結果をえた。トールス結び目は双曲結び目ではないが、Gromov 体積を考えることにより、体積予想が考えられる。トールス結び目については、この特殊値は保型形式のアイヒラー積分を用いて表され、近保型性から漸近展開が厳密に求められる。こうした理由により、数論的・トポロジー的に色つきジョーンズ多項式の 1 の冪根以外での漸近的な振る舞いは大変興味深い。本研究で、樋上は、トールス結び目および 8 の字結び目の色つきジョーンズ多項式の漸近的な振る舞いを解析した。8 の字結び目、およびトールス結び目に対していくつかの点について漸近極限を調べ、アレキサンダー多項式のゼロ点と密接な関係があることをみいだした。その結果、それらの点においては、体積予想で指摘されているような指数関数的な発散ではなく、多項式的な振る舞いをするを明らかにした。

##### (2) 3次元多様体の量子不変量について

① ザイフェルトホモロジー球面の  $SU(2)$  量子不変量に対しては、Lawrence、Zagier、樋上によって、保型形式との関連が知られている。 $SU(2)$  不変量の場合、保型形式との関連から、その漸近挙動に現れる大槻不変量を  $L$ -function によってあらわすことができる。本研究におい

て、他の A 型単純リー環に付随する量子不変量についても、その漸近挙動に現れることが予想されている摂動的量子不変量 ( $SU(2)$  の場合は大槻不変量) について、大槻不変量と  $L$ -function との関連公式に似た形、ベルヌーイ数に関連した形で、低い次数の部分の公式を得ることができた。さらに、摂動的量子不変量の普遍量である LMO 不変量についても、これまで得られていたものより、より明確な公式を得ることができた。これらの公式は  $SU(2)$  以外の 3 次元多様体の量子不変量と保型形式との関連の解明に役立つと思われる。

② 前年度までの研究において、ザイフェルトホモロジー球面について、A 型単純リー環に付随する摂動的な不変量を計算することにより、次数 6 までの LMO 不変量の明確な公式を与えたが、次数が 7 以上については、A 型では得られないことがわかった。これまで得られていた A 型の量子不変量の計算の手法で、B 型に付随する摂動的な不変量の計算を実行し、次数 7, 8 のザイフェルトホモロジー球面に対する LMO 不変量の公式を得た。更に、Garoufalidis, Marino による有理ホモロジー球面の摂動的な不変量が matrix integral としてかけるという予想について、Garoufalidis らの A 型についての証明手法を B 型に適用するやり方で、正しいことを示唆するいくつかの結果をえた。

③ 有理ホモロジー球面の場合、摂動的な量子不変量の対数をとったものは、free energy と呼ばれる。A 型の場合 Garoufalidis, Le, Marino らによって、有理ホモロジー球面の free energy の解析的性質が調べられ、特にレンズ空間については、free energy の明確な公式があたえられた。それは多重対数関数、指数関数、ゼータ関数によってあらわされる。B, C, D 型についても有理ホモロジー球面の free energy は解析的性質をもつことが予想されている。本研究において、レンズ空間について、B, C, D 型リー群に対する free energy の明確な公式を与え、レンズ空間については予想が正しいことを示した。更にその公式は、多重対数関数、指数関数、ゼータ関数によってあらわされ、A 型の場合と同様の解析的性質を持つことがわかった。この結果は、量子不変量と保型形式との関連、数論的性質の解明に役立つと思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① 高田 敏恵,  
On the set of the logarithm of  
The LMO invariant for integral  
homology 3-spheres,  
Math. Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 145,  
349--361 (2009), 査読有
- ② 高田 敏恵,  
Ohtsuki invariants for integral  
homology spheres and Habiro's  
cyclotomic expansion,  
J. of Knot Theory and Its Ramifications  
Vol. 18, No. 1, 1-11 (2009), 査読有
- ③ 高田 敏恵,  
A Formula for the Colored Jones  
Polynomial of 2-Bridge Knots,  
Kyungpook Mathematical Journal  
Vol. 48, No. 2, 255--280 (2008)  
査読有
- ④ 樋上 和弘, 村上 斉,  
Colored Jones Polynomials with  
Polynomial Growth, Commun. Contemp.  
Math., 10 Suppl. 1 (2008) 815-834,  
査読有
- ⑤ 樋上 和弘,  
Duality of linking pairing in Arnold's  
singularities,  
Proc. Japan Acad. Ser. A 87, 81--86  
(2008), 査読有

[学会発表] (計 1 件)

- ① 樋上 和弘,  
From the quantum dilogarithm function to  
The A-polynomial, Workshop on Geometry  
And Integrability, the University of  
Melbourne, 2月13日, 2008年

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高田 敏恵 (TAKATA TOSHIE)

所属 新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号: 40253398

(2) 連携研究者

秋山 茂樹 (AKIYAMA SHIGEKI)

所属 新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号: 60212445

樋上 和弘 (HIKAMI KAZUHIRO)

所属 鳴門教育大学・自然・生活系教育部  
・准教授

研究者番号: 60262151