

平成 21年 4月 30日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2008

課題番号：19540073

研究課題名 (和文) 結び目と3次元多様体の同変不変量

研究課題名 (英文) Invariants of knots and 3-manifolds

研究代表者

大槻 知忠 (OHTSUKI TOMOTADA)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：50223871

研究成果の概要：結び目と3次元多様体の不変量について研究した。筆者はベッチ数が1の3次元多様体の量子不変量の摂動展開を計算し、これを摂動的な不変量として定式化した。さらに、この摂動的な不変量を導出するような LMO 不変量 (普遍摂動的な不変量) の精密化をこのクラスの3次元多様体にたいして構成した。これらの不変量は同変不変量の観点から定式化されたもので、従来知られている不変量よりもはるかに強力な不変量である。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：結び目、3次元多様体、不変量、被覆空間、同変不変量、摂動的な不変量、

LMO 不変量

1. 研究開始当初の背景

3次元の位相幾何学において、1980年代以来、Chern-Simons 理論にもとづいて膨大な数の不変量 (量子不変量) が発見され、不変量の研究、すなわち、結び目の集合と3次元多様体の集合の研究という新しい研究領域がもたらされた。この20年間のこの分野の研究の主な動機は Chern-Simons 場の理論の相関関数をトポロジーの立場から理解することにあつたが、この分野に関してこの20年間になされたさまざまな研究によりその作業はほぼ完了し、最近のこの分野の研究は、そ

のようにして得られた膨大な数の不変量を研究の基礎として、さまざまな新しい研究の方向性を創出するべき段階にある。

2. 研究の目的

3次元多様体の量子不変量、摂動的な不変量、LMO 不変量 や結び目の量子不変量、Kontsevich 不変量、そのループ展開について、それらの同変不変量としての側面に注目しつつ、それらと関連する話題にも留意して、研究をすすめ、この分野の研究を発展させる

ことが、本研究の目的であった。Kontsevich 不変量と LMO 不変量はそれぞれ結び目と整ホモロジー球面を分類するであろうと期待されている非常に強力な不変量であり、とくに、結び目と 3 次元多様体の分類問題と関連して、Kontsevich 不変量と LMO 不変量やこれらに関連する不変量の研究が重要であると筆者は考えた。

3. 研究の方法

first Betti 数が大きくなるほど LMO 不変量は急激に弱くなることが知られており、first Betti 数が正の 3 次元多様体に対して LMO 不変量の refinement をつくるのが本研究の 1 つの目標であった。とくに、LMO 不変量の 1 次の項は Casson-Walker-Lescop 不変量で表示されるので、Casson-Walker-Lescop 不変量の refinement を構成することが具体的な目標であった。たとえば、結び目 K にそって 3 次元球面を 0-surgery してえられる 3 次元多様体 M の量子不変量 (1 の p 乗根における不変量) を p によらない形に展開すると、その 1 次の項は K の 2 ループ多項式で決定されるということがわかるが、これにもとづいて「 M の 2 ループ多項式に相当する不変量」を定式化することにより Casson-Walker-Lescop 不変量の refinement を構成することをめざした。さらに、この refinement が十分に強力な不変量であることを示すためにこの refinement の性質 (たとえば clasper surgery formula) について調べた。

また、この分野の研究を今後さらに発展させるために、連携研究者の葉廣和夫氏と共同で、京都大学数理解析研究所において、低次元トポロジーセミナーを継続的に開催することをめざした。

4. 研究成果

筆者は first Betti 数が 1 の 3 次元多様体の量子不変量の摂動展開を計算し、これを摂動的な不変量として定式化した。さらに、この摂動的な不変量を導出するような LMO 不変量 (普遍摂動的な不変量) の refinement をこのクラスの 3 次元多様体にたいして構成した。従来の定義による LMO 不変量は first Betti 数が大きくなるにつれて急激に弱くなることが知られているが、本研究で筆者が構成した LMO 不変量の refinement はこのクラスの 3 次元多様体にたいしても非常に強力な不変量である。とくに、この refinement の 2 ループの部分から「2 ループ多項式」という 2 変数多項式不変量を定式化することができ、これは Casson-Walker-Lescop 不変量

の refinement になっている。これらの不変量は、3 次元多様体の被覆空間を考え、被覆変換群の作用に関する被覆空間の同変不変量を適切に定めて、これをもとの 3 次元多様体の不変量とみなすことにより、定式化される。筆者はこれらの不変量のさまざまな性質について調べた。

これらの研究成果について、筆者は、2007 年 6 月に北京の国際会議で基調講演をし、2007 年 12 月に京都の国際会議で基調講演をし、2008 年 4 月にデンマークの国際研究集会で招待講演をし、2008 年 8 月にトポロジーシンポジウム (金沢) で招待講演をした。また、これらの研究成果と関連して、筆者は 2008 年 3 月に日本学術振興会賞を受賞した。

また、これらの研究成果と関連して、筆者は 3 次元多様体の不変量について著書 (共著、「幾何学百科」第 2 巻 第 4 章、朝倉書店) の執筆をはじめた (2010 年刊行予定)。

連携研究者の葉廣和夫氏は、底タングルの圏や曲面のコボルディズムのなす圏の代数的構造について、彼が創始したクラスパー理論をもちいて研究した。また、葉廣氏は、摂動的な不変量の「葉廣展開」を定式化し、これをもちいてすべての量子不変量が摂動的な不変量から導出されることを示した。それらの研究成果と関連して、葉廣氏は 2008 年 9 月に日本数学会幾何学賞を受賞した。

筆者は、本研究の連携研究者の葉廣氏と共同で、京都大学数理解析研究所において、低次元トポロジーセミナーを開催した。2007~2008 年度の講演者は、渡辺忠之氏、石井敦氏、Yoav Rieck 氏、John Morgan 氏、Gwenael Massuyeau 氏、Jean-Baptiste Meilhan 氏であった。これらのセミナーは申請者や連携研究者との共同研究をすすめるにあたって、また、大学院生等の若手研究者との研究交流の面からも、大変有益であった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

- ① T. Ohtsuki, Invariants of knots derived from equivariant linking matrices of their surgery presentations, 査読有, Internat. J. Math. (to appear)
- ② T. Ohtsuki, R. Riley, M. Sakuma, Epimorphisms between 2-bridge link groups, 査読有, Geom. Topol. Monogr.

14 (2008) 417-450.

- ③ D. Cheptea, K. Habiro and G. Massuyeau, A functorial LMO invariant for Lagrangian cobordisms, 査読有, *Geom. Topol.* 12 (2008) 1091-1170.
- ④ K. Habiro, A unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariant for integral homology spheres, 査読有, *Invent. Math.* 171 (2008) 1-81.
- ⑤ K. Habiro and J.-B. Meilhan, Finite type invariants and Milnor invariants for Brunnian links, 査読有, *Internat. J. Math.* 19 (2008) 747-766.
- ⑥ T. Ohtsuki, On the 2-loop polynomial of knots, 査読有, *Geometry and Topology* 11 (2007) 1357-1475.
- ⑦ D. Moskovich, T. Ohtsuki, Vanishing of 3-loop Jacobi diagrams of odd degree, 査読有, *J. Combin. Theory Ser. A.* 114 (2007) 919-930.
- ⑧ T. Ohtsuki, Invariants of knots and 3-manifolds, *Sugaku Expositions* 20 (2007) 1-14. (「結び目と3次元多様体の有限型不変量、数学 52、2000年、53-66」の英訳) (原文の日本語版に査読あり)
- ⑨ T. Ohtsuki, Equivariant quantum invariants of the infinite cyclic covers of knot complements, 査読有, ``Intelligence of Low Dimensional Topology 2006'', 253-262, *Ser. Knots Everything* 40, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007
- ⑩ K. Habiro, Brunnian links, claspers and Goussarov-Vassiliev finite type invariants, 査読有, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 142 (2007), 459-468.
- ⑪ K. Habiro, An integral form of the quantized enveloping algebra of sl_2 and its completions, 査読有, *J. Pure Appl. Alg.* 211 (2007), 265-292.

[学会発表] (計15件)

- ① K. Habiro, On the Witten-Reshetikhin-Turaev invariant and analytic functions on roots of unity, *Low dimensional topology and number*

theory, 2009/3/18, 福岡ソフトリサーチパークセンター

- ② K. Habiro, Category of tangles and quantum invariants, The 6th RIMS-Kyoto University and SNU Joint Symposium on Mathematics, 2009/2/17, Seoul National University
- ③ 葉廣和夫, 絡み目と3次元多様体のクラスパーに沿った手術について、日本数学会秋季総合分科会、2008/9/26、東京工業大学大岡山キャンパス
- ④ 大槻知忠, ベッチ数が1の3次元多様体に対するLMO不変量の精密化と摂動的不変量、トポロジーシンポジウム、金沢市文化ホール、2008年8月6日
- ⑤ T. Ohtsuki, A refinement of the LMO invariant for 3-manifolds with the first Betti number 1, Workshop ``Finite type invariants, fat graphs and Torelli-Johnson-Morita theory'', 2008年4月1日, Aarhus University, Denmark
- ⑥ K. Habiro, On the unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariant for integral homology spheres and its extension to Lagrangian cobordisms, Workshop "Finite type invariants, fatgraphs and Torelli-Johnson-Morita theory" Center for the Topology and Quantization of Moduli Spaces (CTQM), 2008/3/29, Aarhus University
- ⑦ 葉廣和夫, 底タングルの圏と量子不変量について、城崎新人セミナー、2008/2/19、豊岡市立健康福祉センター
- ⑧ T. Ohtsuki, A refinement of the LMO invariant for 3-manifolds with the first Betti number 1, International Conference on Topology and its Applications 2007, A Joint conference with ``4th Japan Mexico Topology Conference'', 2007年12月5日, Kyoto University
- ⑨ 葉廣和夫, コボルディズムの圏と底タングルの圏におけるHopf代数構造、信州トポロジーセミナー、2007/11/19、

信州大学理学部

- ⑩ 葉廣和夫、Morse 理論から得られる TQFT について、2+1 次元トポロジーの新しい流れ、2007/11/14、早稲田大学大久保キャンパス
- ⑪ 葉廣和夫、圏 B, L, C において定義される関手について、2+1 次元トポロジーの新しい流れ、2007/11/14、早稲田大学大久保キャンパス
- ⑫ 葉廣和夫、底タングルの圏 B とコボルディズムの圏 L, C について、2+1 次元トポロジーの新しい流れ、2007/11/13、早稲田大学大久保キャンパス
- ⑬ 大槻知忠、ベッチ数が 1 の 3 次元多様体の摂動的不変量、トポロジーセミナー、2007 年 10 月 31 日、東京工業大学
- ⑭ 葉廣和夫、Morse 理論から得られる TQFT について、大阪市大 COE・京大 COE 若手合同発表会、2007/7/14、大阪市立大学文化交流センター
- ⑮ T. Ohtsuki, A perturbative invariant of 3-manifolds with the first Betti number 1, Geometric Topology Conference, 2007 年 6 月 19 日, Peking University, Beijing, China

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大槻 知忠 (OHTSUKI TOMOTADA)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号： 5 0 2 2 3 8 7 1

(2) 分担研究者

葉廣 和夫 (HABIRO KAZUO)
京都大学・数理解析研究所・講師
研究者番号： 8 0 3 4 6 0 6 4
(平成 19 年度)

(3) 連携研究者

葉廣 和夫 (HABIRO KAZUO)
京都大学・数理解析研究所・講師
研究者番号： 8 0 3 4 6 0 6 4
(平成 20 年度)