様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年３月１５日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007 年度～2008 年度
課題番号：19540118
研究課題名（和文）　発展方程式に対する精度保証付き数値計算法の開発

研究課題名（英文）　Development of numerical verification methods on evolution equations

研究代表者
山本野人（YAMAMOTO NOBITO）
電気通信大学・電気通信学部・教授
研究者番号：30210545

研究成果の概要：
発展方程式に対する精度保証法の基礎となる常微分方程式の精度保証のさまざまな手法を開発し、これを国際研究集会などで発表した。さらにその主要なものについて論文にまとめ、出版した。また、高精度計算のための精度保証手法である精度保証付き多倍長演算ライブラリの開発をはじめ、これについての成果も口頭発表した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2008 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総　計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数理系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般
キーワード：数値数学、精度保証付き数値計算

１．研究開始当初の背景

偏微分方程式に対する精度保証付き数値計算法の研究は、申請者らを含む研究グループなどによってすすめられてきたが、時間微分項を含む発展方程式に対する研究は不十分であった。特に、理論構築の困難さ及び計算量の問題が原因で取り組みが遅れていた。
発展方程式の精度保証法への取り組みが遅れている理由は以下のように推察される。
［１］理論構築の困難さ：
発展方程式の精度保証法を構築するためには、空間方向に関しては偏微分方程式境界値問題・時間方向に関しては常微分方程式初期値問題に対する精度保証の技術が基盤となる。しかし、従来この二種類の精度保証法は、その技法のみならず目的意識や問題解決のためのセンス・数学的なバックグラウンドに至るまで著しく異なっており、これらを統合してひとつの理論・技術体系にすることに相当な困難がある。
［２］計算量の問題：
空間２次元以上の問題を扱う場合には、計算量が膨大になる怖れがある。特に時間発展の過程であらわれる様々な誤差の過大評価の要因を減じるためには、時間方向を逐次的に解く方法ではなく、少なくとも部分的には陰解法を用いざるを得ない。これは非常に大きなサイズの連立方程式を精度保証付きで解くことになり、メモリーおよび計算時間の両面での困難を招く。
以上のような困難さを取り除くためには、
◎ 既存の精度保証の技法を再点検してさま

ざまなテクニックを取り込むこと
◎ 手法の統合や計算効率向上のための新しい理論・技術をつくり出すこと
が必須となっている。

２．研究の目的
本研究の目的は、上記のような問題点を取り除き、発展方程式に対する精度保証法の依って立つ基盤を構築することにある。具体的には、

（１） 基礎理論の確立
（２） 常微分方程式の初期値問題に対する新しい精度保証法の開発
（３） これを基礎にした発展方程式のための精度保証技術のライブラリ構築

などが挙げられる。
開発の対象は、例えば、逐次的な方法・陰解法に基礎をおく方法・両者を部分的に使い分ける統合プログラム・位相空間内での解軌道の検索およびこれをもとにした誤差解析の手法・作用素の固有値解析など、解の数値的検証法に関係するさまざまな技法を含む。また、陰解法に現れる係数行列を高速高精度で扱うための手法・区間演算の効率的な用い方・区間演算以外の精度保証演算の利用・自動微分および多倍長演算の利用など、計算コストや精度向上に関る手法をも集成したものとなる。
このようなライブラリ構築の過程で、発展方程式のうち比較的簡単なものに対しての適用を繰り返し、それぞれの手法の特性・問題点を吟味して改善を行う。
本研究の範囲では、例えば時間発展型のナビエ・ストークス方程式の解析などの本格的な応用は意図していない。

３．研究の方法
研究目的の(1)について：
発展方程式に対する精度保証法を構築するにあたって、空間方向には偏微分方程式・時間方向には常微分方程式の技法を組み合わせて用いることを基本戦略とする。偏微分方程式の精度保証付き計算は、近似解法として有限要素法やスペクトル法を用い誤差評価としては L2 ノルムによるものを利用することが多い。これに対して、常微分方程式の精度保証法では、多項式による近似と最大値ノルムによる誤差評価法を用いるのが一般である。これらの整合性を取るべく発展方程式の解の数学的な構造をよく解析した上で近似解の属する関数空間および誤差評価法の構築を行う。1 種の関数空間を固定して用いるのではなく、以下に挙げる項目を考慮してさまざまな局面に対応できるように複数の関数空間・誤差評価法の組を用意する。
◎熱方程式・移流拡散方程式・波動方程式など、方程式の種類ごとにその特性に応じたものであること
◎ 境界条件の選択(固定・スリップ・周期的など)が自由に行えるものであること
◎ 初期値からの感度特性による精度の選択が可能なものであること
特に最後の項目は、単なる時間刻み幅の調整といったレベルにとどまらない。発展方程式を扱う上での計算量の膨大さを考えると、一定の時刻までの計算を行ったのちに、その時刻を初期時刻として計算しなおすリスタートの技法が有用であると予想される。この場合、その時刻の近傍での解の挙動に応じてその後の計算誤差の拡大の様相が変化すると考えられる。これを初期値からの感度特性として捉え、この特性に応じて解軌道を捕捉する方法を切替えることが出来るように考案する。

研究目的(2)について：
上述した関数空間・誤差評価法の設定の過程では、従来の常微分方程式に対する精度保証法との組み合わせでは対応仕切れない場合がありえる。このような場合には、空間方向の関数表現とより整合性の高い新しい精度保証の方法が必要となる。特に発展方程式への適用を考えると、扱う常微分方程式としては 1 階連立正規形で表現した場合の{¥bf 連立の元数が非常に大きいもの}を考えなくてはならない。これへの対処の方法を開発することが眼目となる。ここに現れる連立方程式はその元数が大きいだけでなく、連立する各方程式のあいだには対象となる発展方程式の特性に応じた相互関係が存在する。この相互関係の解析をまず行い、これを利用した効率の良い精度保証法を構成する。

(3)について：
解の数値的検証法に関る技法としては、時間方向へ計算手段として
- ☆ 比較的計算負担の軽い逐次的な方法：ラッピングエフェクトなどの誤差増大要因への対処法を伴う。
- ☆ 精度の高い陰解法に基礎をおく方法：計算量を軽減するための手段を用意。
- ☆ 必要に応じて両者を使い分けるプログラム：時間発展に伴う誤差の発生のメカニズムの解析を利用。また解軌道の解析手段として
- ☆ 位相空間での解軌道の追跡法：必ずしも時間方向に長いスパンの計算を要しない。これをもとに誤差解析を行う。
- ☆ 微分作用素の固有値解析法：位相空間内の与えられた点の近傍での解の挙動を調べるために用いる。

を開発する。

計算コスト・精度向上に関る技法としては、

☆ 特殊な係数行列を持つ大規模連立 1 次方程式の精度保証付き計算を高速高精度で扱うための手法

☆ いわゆる誤差なし内積演算など区間演算以外の精度保証演算と区間演算の併用

☆ さらに高速自動微分や多倍長演算も併用する計算精度・速度のコントロール可能な総合ライブラリ の開発を目指す。

４．研究成果

研究の過程で、常微分方程式の精度保証法について、高い精度と少ない計算コストの手法を、さまざまな状況のもとで用意する必要があることがわかった。そこで、初期値問題・境界値問題・高次補間に基づく高精度手法・数式処理を併用する方法などについて研究・開発を行い、その結果を口頭発表し、いくつかについて論文にまとめて出版した。また、ライブラリについては、多倍長演算を用いる精度保証ライブラリについて研究し、その結果を口頭発表した。これについては継続して研究中である。

発展方程式そのものについての精度保証法は確立するには至らなかった。現在、「発展方程式に対する精度保証付き計算ライブラリの構築」との研究課題名で補助金を受け、本研究課題における研究成果を引き継いで研究を続行している。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

[1] Nobito Yamamoto & Takashi Komori, ‘An Application of Taylor Models to the Nakao Method on ODEs’, JJIAM. vol.26, No.2-3, pp.365-392, 2009査読付き論文

[2] Mitsuhiro T. Nakao , Yoshitaka Watanabe, Nobito Yamamoto, Takaaki Nishida and Myoung-Nyoung Kim, ‘Computer Assisted Proofs of Bifurcating Solutions for Nonlinear Heat Convection roblems’ , Journal of Scientific Computing (on line), 2009, DOI 10.1007/s10915-009-9303-3 査読付き論文

[3] 小森喬・山本野人 「常微分方程式境界値問題の精度保証法の初期値問題への適用」日本応用数理学会論文誌, Vol.18, No.3, 2008, 303-319 査読付き論文

[4]田中一穂・矢野慎一郎・山本野人 「連続した入力パタンのあいだの順序関係を認識する神経回路モデル -- 情報の予測・抽象化に向けて ---」日本応用数理学会論文誌 Vol.18, No.1, 2008, 87--105 査読付き論文

[5]N.Yamamoto, K.Genma, ’On error estimation of finite element approximations to the elliptic equations in nonconvex domains’, Journal of Computational and Applied Mathematics, 199 (2007) 286--296 査読付き論文

〔学会発表〕（計 11 件）

(1) N.Yamamoto, ``Validated Computation of Closed Orbits of Dynamical Systems'', International workshop on verified computation and related topics, March 7-10, 2009, University of Karlsruhe(TH), Germany

(2) 山本野人 「常微分方程式の精度保証：Taylor Model 法の中尾理論への導入」 RIMS 研究集会「数値解析における理論・手法・応用」2008 年 11 月 14 日

(3) 松田望 (山本野人)「多倍長演算と精度保証付き数値計算」 環瀬戸内応用数理研究部会第 １２回シンポジウム、2008 年 10 月 12 日

(4) 山本野人・小森喬「常微分方程式の精度保証法について」 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会、2008 年 9 月 27 日

(5) 山本野人「常微分方程式の精度保証法について」 日本応用数理学会 2008 年度年会、2008 年 9 月 19 日

(6)小森喬・山本野人「常微分方程式の数値解に関する精度保証の技法について」 日本応用数理学会研究部会連合講演会「科学技術計算と数値解析」研究部会 2008 年 3 月 8 日

(7)K.Shioda, N.Yamamoto ‘Numerical verification on existence of periodic solutions to ODEs’, International Workshop on Numerical verification and its Applications (INVA2008), Okinawa, Japan, 1st – 7th Mar., 2008

(8) N.Yamamoto, T.Komori,''A numerical verification method for ODEs based on the Nakao Theory'', DMHF2007, Fukuoka, Japan, 1st – 4th Oct., 2007

(9) 小森喬・山本野人「高次補間に基づく常微分方程式の精度保証法について」 日本数学会 2007 年度秋期総合分科会、2007 年 9 月 23 日

(10) N.Yamamoto,''A theorem for numerical verification of local uniquness'',
ICIAM 07, Zurich,Switzerland, 16 - 20 July, 2007
(11) 山本野人・小森喬「高次補間に基づく常微分方程式の精度保証法について」
第 36 回数値解析シンポジウム、2007 年 6 月 21 日

〔図書〕(計 1 件)
(1) 現代数理科学事典第２版 IX 数値計算, 丸善, 2009 (共著)

６．研究組織

(1)研究代表者
山本野人 (YAMAMOTO NOBITO)
電気通信大学・電気通信学部・教授
研究者番号：30210545

(2)研究分担者
中村健一 (NAKAMURA KENICHI)
電気通信大学・電気通信学部・助教
研究者番号：40293120

(3)連携研究者
なし