

平成 21 年 5 月 29 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2008

課題番号：19540152

研究課題名 (和文) 公理的集合論の大域的 research

研究課題名 (英文) Search of extensions of the axiom system of set-theory from a global view point

研究代表者

瀧野 昌 (FUCHINO SAKAÉ)

中部大学・工学部・教授

研究者番号: 30292098

研究成果の概要：

本研究で得られた主要な結果としては、(1) [雑誌論文] [5], [4] でのコーエンモデルや、もっと一般に小さな p.o. の side by side product による強制で得られるモデルの組合せ論的性質を公理化すると考えられる組み合わせ論的原理に関する理論の確立、(2) 多くの数学的な反映原理と同値になる Fodor-type Reflection Principle (FRP) と名付けた stationary reflection principle のバリエーションの定式化と、その理論の確立 ([雑誌論文] [3], [1]) があげられる。特に (2) の研究では、本研究終了前後の時期に、従来 Axiom R と呼ばれる FRP より真に強いことの知られている原理から証明されていたトポロジー、グラフ理論などでの reflection に関する結果の多くが、ZFC 上 FRP と同値になるという結果が得られているが、この結果は、FRP が "正しい" 原理の定式化であることを強く示唆しているもの、と解釈できる。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2008 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード：公理的集合論

1. 研究開始当初の背景

研究の開始にあたっては、[雑誌論文] にあげた、神戸大学工学研究科の Jörg Brendle との共著論文 ([雑誌論文] の [5]) が最終仕上の段階に入っており、reflection principles に関する基礎的な研究結果の分析が始められていた。

Reflection principles に関しては、研究代表者は 1990 年代にブール代数の理論での応

用として、openly generated なブール代数の圏の特徴付けなどに関するいくつかの結果を得ていたが、この間に、 $[\kappa]^\omega$ の stationary set の reflection から、 $2^\omega \leq \omega_2$ が導けることなど、新しい知見が多く得られており、これらの結果を足掛かりとして 1990 年代の研究では得ることのできなかった進展の可能性が感じられた。

研究代表者 (瀧野) は本研究一年目の秋に、

上記の 1990 年代の研究から [雑誌論文] の [5] にいたる研究を俯瞰する総合講演を行なったが ([学会発表] の [14]), この発表の準備のために 1990 年代の仕事を再び見なおしたことが、後述の Fodor-type Reflection Principle の研究への布石の一つになった。

2. 研究の目的

本研究は、実数の集合論、実数値可測基数の理論、無限組合せ論、特に、 $P_\kappa \lambda$ の組合せ論や ${}^\kappa \kappa$ の組合せ論、無限ブール代数の理論などの異なる集合論内の研究分野での個別の具体的な未解決問題の研究を足掛かりとして、集合論のより大域的な諸問題にアプローチし、その究明を試みようとするものであったが、実際、本研究では、トポロジーや無限組合せ論における数学的な問題から出発して Homogeneity Principle (HP) や Fodor-type Reflection Principle (FRP) を含む、いくつかの組合せ論原理 (公理) を抽出し、それらの意味づけを与える諸定理を証明することができた。この意味で、研究開始当初に設定した方向で一定の研究結果が得られたと言ってよいであろう。

3. 研究の方法

本研究は "純粋数学" に属するものであり、研究の方法としては、近い研究分野の研究者や共同研究者との討論や、文献の勉強を除くと、深く集中して考える、ということにつきる。研究代表者の現在の研究環境は、外界の雑音を遮断して集中して考えるためには理想的なものとは必ずしも言えないため、集中して考えられるような時間や環境の捻出は常に非常に大きな問題であった。

本研究の期間中の、2008 年の春学期には、Joan Bagaria 教授から招待を受けて、スペイン、バルセロナの CRM 数学研究所に客員研究員として滞在したが、この期間、研究に集中できる環境を得ることができ、本研究での決定的な結果を幾つか得ることができた。

4. 研究成果

本研究の主要結果のうち、[雑誌論文] [5] と [4] での結果は一つながりの文脈にあるものとなっている。

研究協力者 Jörg Brendle との共著論文 [雑誌論文] [5] では、与えられた基数 κ の要素である順序数の実数による色分け $f: \kappa \rightarrow \mathbb{R}$ が常にある種の一様性を持つことを主張する $HP(\kappa)$, $IP(\kappa, \lambda)$ を定式化した。例えば、 $HP(\kappa)$ は次のように定式化できる:

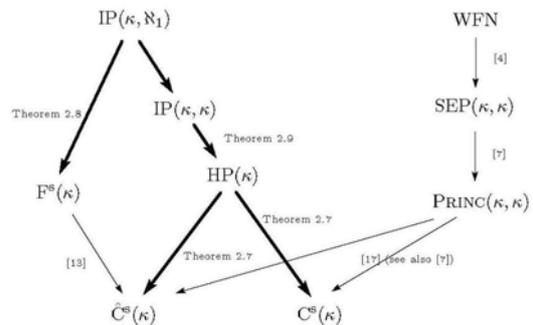
$HP(\kappa)$: For any $f: \kappa \rightarrow P(\omega)$ and any definable $A \subseteq ((P(\omega)))^{<\omega}$, at least one of the

following holds:

- (h0) there is a stationary $S \subseteq \kappa$ such that $((f''S)^{<\omega} \setminus \{0\}) \subseteq A$;
- (h1) there are $k \in \omega \setminus 1$ and stationary $S_0, \dots, S_{k-1} \subseteq \kappa$ such that $((f''S_0, \dots, f''S_{k-1})) \cap A = \emptyset$.

ここで $(X)^{<\omega}$ は ${}^\omega X$ の injective な要素全体をあらわし、 (X_1, \dots, X_n) は $X_1 \times \dots \times X_n$ の injective な要素の全体をあらわす。 $P(\omega)$ は、自然な同型で Cantor set と同一視できるが、ここでは、この対応で実数の全体の集合と (可算集合を除いて) 同一視している。

これらの原理と、Fuchino-Geschke-Soukup, Fuchino-Geshke による, WFN, SEP, また Shelah の Princ, Juhász-Soukup-Szentmiklóssy による $C(\kappa)$ などの間の implications が次のようなものになること



を明らかにした:

図 1

また、 $HP(\kappa)$ と bounding number の variants が \aleph_1 と等しくなる、という主張との間の関係についても明らかにした:

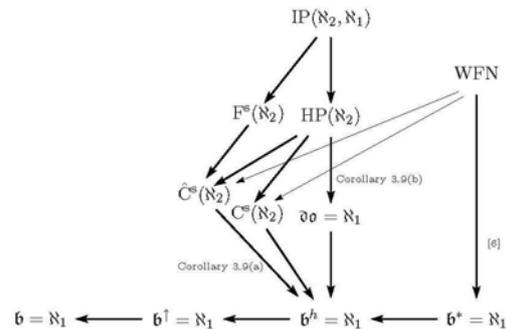


図 2

SEP や WFN などが, Cohen model (CH のモデルから出発して Cohen reals を適当な数だけ付加して得られる generic 拡大) での組合せ論の公理化とみなせるものだったのに対し、 $HP(\kappa)$, $IP(\kappa, \lambda)$ はサイズの小さい proper p.o. のコピーの finite または countable side-by-side product による generic 拡大での状況 (Cohen model もこの

ような generic 拡大の一つである) を公理化している, とみなせることを示した.

また, これらの原理の間の implications の分離の可能性は, 既知の結果も含め以下の図式に纏められた (子細は [雑誌論文], [5] 参照):

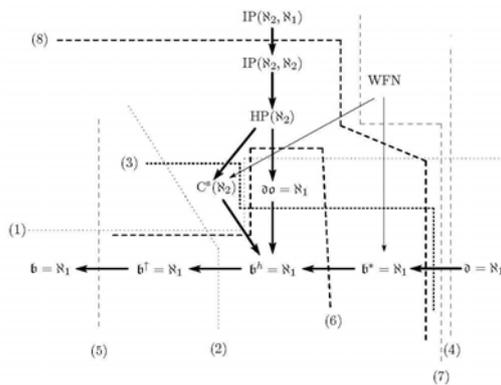


図 3

[雑誌論文], [4] で, 定式化された Arnold Miller の 1989 年の結果の主張を一般化し, 原理 GFMCP(κ, λ) を,

GFMCP(κ, λ): For any projective relation $R \subseteq \mathcal{R}^2$, and $X \in [\mathcal{R}]^{<\kappa}$, if X is unbounded in $\langle \mathcal{R}, R \rangle$, there is $X_0 \subseteq [X]^{<\lambda}$, such that X_0 is unbounded in $\langle \mathcal{R}, R \rangle$.

として導入した.

HP(κ) や IP(κ, λ) は既に述べたように, サイズの小さい proper p.o. のコピーの finite または countable side-by-side product による generic 拡大で成り立つ原理であるが, 類似の積構造や一様性を持つ random forcing の measure theoretic product で force して得られるモデルでは成り立たない.

これに対し, GFMCP(κ, λ) は, productively c.c.c. を満たす, 小さな p.o. のコピーの finite support side-by-side product で成り立つだけでなく, random model でも成り立つものとなっていることを示した. もう少し正確には, P を濃度が $\mu = \mu^{<\kappa}$ 以下の productively c.c.c. p.o. のとき, P の κ 個のコピーの finite support side-by-side product で force したとき, GFMCP(κ, μ^+) が成り立つ. 同様に random model では, GFMCP(κ, \aleph_2) が成り立つ.

この原理と HP(κ) や IP(κ, λ) との関係が何かは未解決な問題として残された.

本研究における研究成果のもう一つの系列は, stationarity の reflection に関するものである.

Ordinals の集合, あるいは ordinals の可算集合の集合の stationarity に関する reflection principles (反映原理) は様々なものが知られている. そのうちで (少なくとも見掛け上では) 一番強い Axiom R とよばれる W. Fleissner が 1986 年の論文で導入した原理を仮定すると, 一般位相空間論などにおける様々な "数学的" な反映原理が証明できることが知られていた.

研究代表者は, 海外研究協力者 István Juhász, Lajos Soukup, Zoltán Szentmiklóssy および研究協力者 薄葉季路との共著論文 [雑誌論文][1] で, Axiom R から帰結される RP と ordinals の集合の stationarity の reflection の主張 ORP の間に位置する Fodor-type Reflection Principle (FRP) と名付けた組合せ論原理を導入し, [雑誌論文][1], [3], およびこれに続く研究で, 現在までに知られている Axiom R の数学的応用のほとんどが, 既に FRP から導かれることを示した. ここに, FRP は次の FRP(κ) がすべての非可算正則基数 κ に対し成り立つという主張である:

FRP(κ): For any stationary $S \subseteq E^{\kappa, \omega}$ and mapping $g: S \rightarrow [\kappa]^{<\omega}$ there is $I \subseteq [\kappa]^{\aleph_1}$ such that

(2.1) $\text{cf}(I) = \omega_1$;

(2.2) $g(\alpha) \subseteq I$ for all $\alpha \in I \cap S$;

(2.3) for any regressive $f: S \cap I \rightarrow \kappa$ such that $f(\alpha) \in g(\alpha)$ for all $\alpha \in S \cap I$, there is $\xi^* < \kappa$ such that $f^{-1} \{ \xi^* \}$ is stationary in $\text{sup}(I)$.

HP(κ) や IP(κ, λ) は ZFC と equi-consistent だったが, FRP は square principle の global な否定を導くので, 大きな consistency strength を持っている. 一方, FRP は RP より本質的に弱い原理である: [雑誌論文][1] で, FRP が c.c.c. p.o. による generic 拡大で保存されることを示したが, RP からは, $2^\omega \leq \aleph_2$ が導かれることが知られているので, 特に連続体濃度を \aleph_2 以上に大きくするような c.c.c. 拡大では保存されない.

本研究の研究期間の終了前後に, 研究代表者の, 海外研究協力者 Lajos Soukup および, 研究協力者 酒井 拓史, 薄葉 季路との共同研究で, すべての非可算な正則基数 λ に対し, どの $E^{\lambda, \omega}$ の stationary subset 上にも almost essentially disjoint な ladder system が存在しない, という命題が FRP と同値であることが示せた. このことから, FRP の帰結として得られた数学的な reflection properties の多くは, 実は FRP と ZFC 上同値になることが証明できる.

この意味で, FRP の特徴付けとなっている数

学的な reflection properties のうちには、次のようなものがある:

• For a locally countably compact space X , if X is not metrizable, then there is a subspace Y of X of cardinality $\leq \aleph_1$ which is not metrizable.

• For a T_1 -space X with a point countable base, if X is not left-separated, then there is a subspace Y of X of cardinality $\leq \aleph_1$ which is not left-separated.

• If a graph (V, E) has coloring number $\geq \aleph_1$, then there is an infinite subgraph of (V, E) of cardinality \aleph_1 with coloring number \aleph_1 .

これらの結果は, FRP が reflection principles の階層の中で重要な位置をしめる組合せ原理の一つであることを強く示唆している. FRP の更なる数学的応用の探究, また, FRP の consistency-strength (つまり FRP と equi-consistent な large cardinal) の探究など, この原理に関する多くの重要な研究課題が残っており, その研究が, 本研究に続く研究に重要な課題として残されている.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

[1] Sakaé Fuchino, István Juhász, Lajos Soukup, Zoltán Szentmiklóssy and Toshimichi Usuba, Fodor-type Reflection Principle and reflection of metrizable and meta-Lindelöfness, Special Issue of "Topology and its Applications" dedicated to the Proceedings of the Conference "Advances in Set-Theoretic Topology" (in Honour of Tsugunori Nogura on his 60th Birthday), (2009), accepted. 検読有

[2] Sakaé Fuchino, Forcing Axioms and the Continuum Problem, Sugaku Expositions, Vol.21, No.2 (2008), 147--159. 検読有

[3] Sakaé Fuchino, Left-separated topological spaces under Fodor-type Reflection Principle, 数理解析研究所講究録, No.1619, (2008), 32--42. 検読無

[4] Sakaé Fuchino, A generalization of a problem of Fremlin, 数理解析研究所講究録,

No.1595 (2008), 6--13. 検読無

[5] Sakaé Fuchino and Jörg Brendle, Coloring ordinals by reals, Fundamenta Mathematicae, Vol.196, No.2 (2007), 151--195. 検読有

[学会発表] (計 14 件)

[1] Sakaé Fuchino, "Fodor-type Reflection Principle and its applications", 2009 年 3 月 6 日, 8th Kansai Set Theory Seminar, Kobe University, Kobe, Japan.

[2] 瀧野 昌, "Transfer Property としてのコンパクト性", 2009 年 1 月 9 日, 計算による数理科学の展開 2009, 神戸大学理学部.

[3] 瀧野 昌, "Locally "nice" spaces の距離付け可能性と meta-Lindelöf 性", 2008 年 12 月 17 日, 2008 General Topology シンポジウム, 高崎経済大学.

[4] 瀧野 昌, "Meta-Lindelöf 性と距離付け可能性に関する reflection properties について", 2008 年 9 月 26 日, 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会, トポロジー分科会, 東京工業大学.

[5] Sakaé Fuchino, "Reflection of non-metrizability", 2008 年 8 月 26 日, Workshop on Combinatorial and Descriptive Set Theory Satellite Conference of the ALC 10, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto, Japan.

[6] Sakaé Fuchino, "Reflection Principles and Local Metrizability of Topological Spaces", 2008 年 7 月 2 日, Set-theory seminar Barcelona (seminari de teoria de conjunts, Barcelona), Spain.

[7] Sakaé Fuchino, "Fleissner's Axiom R and other Reflection Principles", 2008 年 6 月 13 日, invited talk, Advances in Set-Theoretic Topology, International Center for Scientific Culture "Ettore Majorana", Erice, Italy.

[8] Sakaé Fuchino, "Axiomatization of generic extensions by homogeneous partial orderings", 2008 年 5 月 29 日, invited talk, Colloquium on Mathematical Logic, Amsterdam, Netherlands.

[9] Sakaé Fuchino, "Reflection principles", 2008 年 4 月 16 日, Set-theory seminar Barcelona (seminari de teoria de conjunts,

Barcelona), Spain.

[10] Sakaé Fuchino, "On (anti)hierarchy of reflection principles", 2008年3月21日, Set Theory Meeting in Kobe, 神戸大学大学院工学研究科 新井プロジェクト.

[11] 瀧野 昌, "Axiom R について", 2008年2月8日, 関西集合論セミナー, 神戸大学大学院工学研究科 新井プロジェクト.

[12] Sakaé Fuchino, "Fremlin's Covering Property", 2007年11月30日, RIMS 研究集会「公理的集合論と集合論的位相空間論」, 京都大学 数理解析研究所.

[13] 瀧野 昌, "Fremlin の原理の一般化について", セミナー講演, 2007年11月2日, 関西集合論セミナー, 神戸大学大学院工学研究科 新井プロジェクト.

[14] 瀧野 昌, "射影代数, K-距離付け可能空間から, コーエン・モデルへ", 2007年9月24日, 日本数学会 2007年度秋季総合分科会, 特別講演, 東北大学.

[図書] (計1件)

[1] 田中一之, 瀧野 昌, 松原 洋, 戸田山和久 ゲーデルと20世紀の論理学 (ロジック) 第4巻, 集合論とプラトニズム", 東京大学出版会 (2007), 担当部分: pp.29 - 148.

[その他]

関連する web-pages:

[1] <http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/>

[2] <http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~logic/>

[1] は研究代表者の web-page, [2] は研究代表者の管理する名古屋地区の集合論セミナーの web-page である. [1], [2] とも, 本研究に関連の preprints, notes 等へのリンクやリポジトリ等を含む.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

瀧野 昌 (FUCHINO SAKAÉ)

中部大学・工学部・教授

研究者番号: 30292098

(2) 研究分担者

該当者なし

(3) 連携研究者

該当者なし

(4) 研究協力者

Brendle Jörg (ブレンドレ ヤーグ)
神戸大学・大学院工学研究科・准教授

酒井 拓史 (Sakai Hiroshi)
神戸大学・大学院工学研究科・助手

薄葉 季路 (Usuba Toshimichi)
東北大学・大学院理学研究科・教育研究支援者

(現 Universität Bonn (ドイツ)・Hausdorff-Zentrum für Mathematik・wissenschaftlicher Mitarbeiter)

(5) 海外研究協力者

Joan Bagaria (バガリア ジョアン)
Universitat de Barcelona (スペイン)・ICREA Research Professor

Soukup Lajos (ソukup ライオシュ)
Hungarian Academy of Sciences(ハンガリー)・Alfréd Rényi Institute of Mathematics・Professor

Juhász István (ユハス イシュトバン)
Hungarian Academy of Sciences(ハンガリー)・Alfréd Rényi Institute of Mathematics・Professor

Szentmiklóssy Soltán (セントミクロッシゾルタン)

Eötvös University of Budapest (ハンガリー)・Assistant Professor