様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　23　年　6　月　13　日現在

機関番号：62615
研究種目：基盤研究(C)(一般)
研究期間：2007　～　2010
課題番号：19540156
研究課題名（和文）　置換簡約の型理論

研究課題名（英文）　Type Theory of Commutative Reductions

研究代表者
龍田　真　　(TATSUTA MAKOTO　　)
国立情報学研究所・情報学プリンシプル研究系・教授
研究者番号：80216994

研究成果の概要（和文）： 置換簡約やその関連概念を用いて論理体系および型付ラムダ計算を拡張した体系について、それを構築し、その基本性質を明らかにした。特に、共通型の型同形を特徴付け，非可換一階シーケント計算の性質，multiple quantifier をもつ型付ラムダ計算の型推論の性質，型理論 F の内部的 decompiler-normalizer の性質，遺伝的置換子の型理論による特徴付けを証明した。

研究成果の概要（英文）： We developed logical systems and type systems extended with commutative reductions and their related notions, and showed their fundamental properties. In particular, we proved characterization of isomorphisms of intersection types, properties of non-commutative first-order sequent calculus, properties of type inference for type systems with multiple-quantifier, properties of an internal decompiler-normalizer for type system F, and characterization of hereditary permutators by type systems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総　計	3,600,000	1,080,000	4,680,000

研究分野：理論計算機科学および数理論理学
科研費の分科・細目：数学　数学一般
キーワード：プログラム理論

１．研究開始当初の背景

置換簡約の強正規化可能性は近年活発に研究されている。

置換簡約(permutative reductions)は，or や exists を含む自然演繹の証明の正規化を考えるとき，不可欠である。or や exists を含む一階自然演繹の証明の強正規化可能性に関しては，Prawitz をはじめとして，いろいろな証明方法が論じられてきた。体系 F の場合の証明方法のような saturated sets を用いた簡明な証明が NJ に対して長い間望まれていたが達成されていなかった。二階自然演繹の強正規化可能性に関しては，Matthes または Prawitz による証明しかなく，さらに Prawitz は証明の大幅な修復が必要であった。Matthes は，複雑な帰納的定義を用い，かなり難解な証明になっている。

or,exists と置換簡約をもつ体系の証明の強正規化可能性に関して，二階自然演繹の強正規化可能性の簡明な証明が、近年本研究代表者により与えられた。

２．研究の目的

置換簡約の強正規化可能性は近年活発に研究されている。また、定理自動証明システム Coq は、フランスで研究開発されている証明システムで、基本理論と応用の両面で成功している。

本研究では、これらの研究成果を深化発展させることにより、置換簡約の型理論の研究を行う。具体的には、次の(1)(2)の研究を行う。

(1)置換簡約やその関連概念を用いて論理体系および型付ラムダ計算を拡張した体系について、それを構築し、その基本性質を明らかにする。

(2)基礎的な理論成果を応用することにより Coq 理論などの実用的システムを置換簡約などにより拡張する理論を与える。

３．研究の方法

(1) 置換簡約をもつ二階自然演繹の強正規化可能性定理の証明で、型に対応した飽和集合を定義し、より簡明で一般性があり拡張性の高い証明を与える．置換簡約をもつ二階自然演繹の強正規化可能性の新しい簡明な証明方法の研究は、まず、カリーハワード同型により、自然演繹を型理論とみなすことにより研究を進めｔる。次に、各型に飽和集合を割り当てる。飽和集合により与えられるモデルに対して、型理論が健全であることを、証明図の構成に関する帰納法で証明する。健全性から強正規化可能性が得られる。
また、型推論の決定可能性をもつような制限された多相をもつ型理論への拡張の可能性を調べその中で十分に強力である型理論を構築する。

(2) 置換簡約やその関連概念を用いて論理体系および型付ラムダ計算を拡張した体系について、それを構築し、その基本性質を明らかにする．置換簡約の本質を明らかにし、置換簡約の本質に根ざした関連概念による型理論の拡張や古典論理に対応する型理論の拡張を構築する研究を行う。置換簡約をもつ体系は、選言をμで表すことにより、λμ計算と類似した体系になる。この原因を調べ、置換簡約の本質を明らかにする。
また、型推論の決定可能性をもつような制限された多相をもつ型理論への拡張の可能性を調べその中で十分に強力である型理論を構築する。

(3) 純型理論の強正規化可能性と弱強正規化可能性の同等性を証明する．純型理論の強正規化可能性と弱強正規化可能性の同等性の研究は、まず、型の依存関係を単純化することからはじめる。型関係の順序に関して大きな型が小さな型に依存する依存関係を正規化可能性および無矛盾性を保存して除去できることを示す。

４．研究成果

(1) 型簡約と等号理論を与え、これらが共通型の型同形を特徴付けるという定理を証明した。共通型の型同形は代入にたいして安定ではないことを示し、他の型理論のように合同関係による特徴づけができないことを示した。次に、型簡約を導入し、与えられた型を同形であるがより単純な型に変形できることを示した。最後に、等号理論を与え、この簡約に関して正規である型に関する同形がこの等号理論により特徴付けられることを証明した。

(2) 非可換一階シーケント計算 NCLK を構成した。まず、非可換 positive fragment を普通の一階シーケント計算で前件にグループがあり右交換規則のない論理体系 LK-に拡張した。次のことを示した。(i) NCLK は LJ に同等、(ii) NCLK に交換規則を追加すると LK に同等になる、(iii) LK-は LJ に同等、(iv) LK-と NCLK の間の翻訳がある。

否定、積、多相型、存在型から成るラムダ計算の inhabitation 問題が決定可能であることを証明した。このため、対応する論理体系である含意と選言をとり除いた二階自然演繹について、その証明可能性が決定可能であることを証明した。

(3) multiple quantifier とは、任意個数の複数個の quantifier を導入または除去できる規則をもつ quantifier である。否定、直積と 存在に関する multiple quantifier をもつ型付ラムダ計算の型推論が非決定可能であることを証明した。また、任意に関する multiple quantifier と含意をもつ型付ラムダ計算の型推論が非決定可能であることを証明した。

(4) 型理論 F の項として、型理論 F のある単射解釈の像に対する decompiler-normalizer を与えた。これらの項、評価による正規化、および型理論 F のベータイータ完全モデルの関係を明らかにした。

(5) 遺伝的置換子を特徴付ける型が存在しないという定理を証明した。また、可算無限個の型を与え、これが遺伝的置換子を特徴付けるという定理を証明した。た。第一の定理は、遺伝的置換子全体が枚挙不可能であることを示すことにより証明された。第二の定

理は、共通型型理論を用い、レベル n に対する型同型 n を定義し、それにより深さ n までは遺伝的置換子であることが特徴付けられる型 pn を定義し、そのような型 pn 全体を用いることにより、証明した。

遺伝的置換子とは関数の引数の置換の無限の入れ子を表すラムダ式である．有限な遺伝的置換子は beta eta-簡約によるラムダ計算における可逆項を特徴付けた． また，Bergstra は，遺伝的置換子が スコットモデルD_∞における可逆項を特徴付けることを証明した． 可逆項は，型同型の特徴付けなどに用いられる．

TLCA 未解決問題第 20 番とは， 遺伝的置換子を特徴付ける型システムを見つけよ，という問題である．

本研究はこれに答えた．

まず，遺伝的置換子全体が枚挙不可能であることを示すことにより， そのような型システムが存在しないことを証明する． 次に，最善解として，可算無限個の型を与え，項がそのすべての型をもつこととその項が遺伝的置換子であることが同等であることを証明する．

正原始再帰関数を用いて第一定理を証明する． 正原始再帰関数全体は枚挙不可能であることが示される． 原始再帰関数 f が与えられたとき，特定の遺伝的置換子を， そのベーム木の n 番目のノードにおいて f(n) が正であるかどうか判定し， 正であれば元の n 番目のノードを返し， f(n)=0 であれば bottom になるように修正すると，このラムダ式が遺伝的置換子であることと f(x) が正原始再帰関数であることが同等になる．これにより遺伝的置換子全体が枚挙不可能であることが証明できる．

M が遺伝的置換子であることは BT(M) の局所条件(H1),(H2) により定義される．型 A_n を，M:A_n であることと BT(M) の深さ n 未満の部分が条件(H1),(H2)を満たすことが同等になるように定めることができる．これにより， M が遺伝的置換子であることと任意の n に対して M:A_n が成り立つことが同等になる．これにより，可算無限個の型による遺伝的置換子の特徴付けが与えられる．

Klop 問題やストリーム型にも同じ証明方法が適用できる．これらが扱う集合はいずれも，枚挙不可能であり，可算無限個の型により特徴付けることが できる．この証明アイデアの発展方向についても論じた．

本研究は，さらに、 遺伝的置換子全体が Pi^0_2 完全であることを述べる定理を証明し，また， この証明手法と Klop 問題およびストリーム型との関連を指摘することにより証明手法の発展方向について新しく論じた．

遺伝的置換子について説明する．

まずラムダ計算の定義を与える．

変数を x,y,z,... であらわす．

項 M,N,... を次のように定義する．

M,N,... ::= x | lambda x.M | MM.

自由変数の名前変えをしても同じ項とみなす．

M[x:=N] により M 中の自由な変数 x に N を代入したものを表す．

Lambda により項全体を表す．

1ステップ \beta-簡約 M red_beta N は次の合同閉包と定義される．

(lambda x.M)N red_beta M[x:=N].

beta-簡約 redbeta* は red_beta の反射推移閉包である．

beta-等号 M =_beta N は redbeta* を含む最小の同値関係であると定める．

M が lambda x_1 ... x_n.yN_1 ... N_m の形であるとき，M は頭正規形であるという．

ある頭正規形Nがあって M =_beta N となるとき，M は頭正規化可能であるという．

次にベーム木の定義を与える．

bottom を定数記号とする．

ベーム木とは，ノードラベルが bottom か lambda x_1 ... x_n.y の形である深さが無限かも知れない木である．ノード lambda x_1 ... x_n.y の頭変数は y であるという．

項 M のベーム木 BT(M)は次のように定義される．

(B1) BT(M) = bottom (M が頭正規化可能でないとき)

(B2) BT(M) は、lambda x_1 ... x_n.y を親ノードとし、BT(M_1) ... BT(M_m) を子の木とする木である。(M =_beta lambda x_1 ... x_n.yM_1 ... M_m のとき)

遺伝的置換子の定義．項 M は，BT(M) が次の条件を満たすとき，遺伝的置換子(hereditary permutator)であるとよばれる．

(H1) ルートノードは lambda z x_1 ... x_n.z の形で，このとき，その子ノードは n 個であり，x_1,…,x_n は子ノードの頭変数として 1 回づつ出現する．

(H2) ルートノード以外のノードは lambda x_1 ... x_n.y の形で，このとき，その子ノードは n 個であり，x_1,...,x_n は子ノードの頭変数として 1 回づつ出現する．

TLCA 未解決問題 20 番とは，遺伝的置換子全体を特徴付ける型を見つけよ，という問題

である．すなわち，ある型システム T とその型 A を見つけ，M : A が T で証明可能であることと，M が遺伝的置換子であることが同等であることを証明せよ，という問題である．

本研究は次の定理を証明することによりにこの問題に答えた．

遺伝的置換子の型の不存在を説明する．HP により遺伝的置換子全体を表し，N により自然数全体を表す．

定理１．HP は枚挙不可能である．

定理２(遺伝的置換子の型の不存在)．次を満たすような型システムTとその型Aは存在しない：

言語および推論規則全体がが枚挙可能であり，M が遺伝的置換子であることとある Gamma があって T で Gamma |- M:A が証明できることが同等になる．

次に、最善解であることを説明する．

定理３．HP は Pi^0_2 完全集合である．

ゆえに TLCA 未解決問題 20 番の最善解は次のような問題の解である．

- 型理論Tと可算無限個の型 A_n (n = 0,1,2, ...)を見つけて，M が遺伝的置換子であることと，任意の n に対して M:A_n が T で証明できることが同等になる．

ここで |-_T M:A_n (forall n) は Pi^0_2 論理式になるため，これが最善解であるといえる．この問題に対する解は，A_n を，

- M:A_n であることと， BT(M) が深さ n 未満の部分が条件(H1) と (H2) を満たすことが同等

となるように定めることにより得られる．このアイデアに基づく解を次に与える．

型システム T を定義する．

型定数 p_n, q_m (n >= 0, m >= 1)，と Omega をもつ．

型 A,B, ... は次のように定義される．

A,B, ... ::= p_n | q_m | Omega | A -> A | A cap A.

TC(vec A) を型の列 vec A に現れる型定数全体と定める．

n >= 0 に対する型部分同値関係 A sim_n B を次のように n に関する帰納法で定める．

Omega sim_0 Omega.

A_i sim_n B_i (1 <= i <= m) ならば B_{pi(1)} -> ... -> B_{pi(m)} -> q_k sim_{n+1} A_1 -> ... -> A_m -> q_k.

ただし第二規則中で m >= 0，pi は位数 m の対称群の元であり，また，TC(A_i,B_i) - { Omega } (1 <= i <= m)， q_k は共通部分をもたない．

型宣言 Gamma,Delta, ... は { x_1:A_1,...,x_n:A_n } の有限集合である．ここで，x_i は相異なる変数で，A_i は型である．判定は Gamma |- M : A の形である．

x_1:B_1,...,x_n:B_n |- M:A により { x_1:B_1,...,x_n:B_n } |- M:A を略記する．

型推論規則は次により与えられる．

共通型型理論の標準的な推論規則である (As), (->I), (->E), (cap I), (cap E1), (cap E2), (Omega) を含む。さらに次の推論規則を含む。

```
Gamma,z:A |- M:B   A sim_n B
-----------------------------(p_n I)
Gamma |- lambda z.M:p_n
```

これは型部分同値関係 sim_n と型定数 p_n,q_m を除いて標準的な共通型システムである．

A sim_n B の意味は次である：

z:A |- M:B であることと BT(lambda z.M) の深さ n 未満が条件(H1),(H2)を満たすことが同等である．

また，p_n の意味は次である：

lambda z.M:p_n であることと BT(lambda z.M) の深さ n 未満が条件(H1),(H2)を満たすことが同等である．

型定数 q_m は sim_n の局所性のため補助的に用いられる．共通型と型定数 Omega は Subject Expansion 性のため必要である．

定理４(特徴付け定理)．M が遺伝的置換子であることと任意の n に対して型システム T が |- M : p_n を証明することが同等である．

以上の定理により，遺伝的置換子全体を特徴付ける型を見つけよ，という TLCA 未解決問題 20 番に答えた．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　8 件）

[1] Koji Nakazawa and Makoto Tatsuta, Type Checking and Inference for Polymorphic and Existential Types in Multiple-Quantifier and Type-Free Systems, Chicago Journal of Theoretical Computer Science (2010)

Article 7, 査読有.

[2] Makoto Tatsuta, Ken-etsu Fujita, Ryu Hasegawa, and Hiroshi Nakano, Inhabitation of Polymorphic and Existential Types, Annals of Pure and Applied Logic 161 (11) (2010) 1390--1399, 査読有.

[3] Mariangiola Dezani-Ciancaglini, Roberto Di Cosmo, Elio Giovannetti and Makoto Tatsuta, On Isomorphisms of Intersection Types, ACM Transactions on Computational Logic 11 (4) (2010) Article No 25, 査読有.

[4] Stefano Berardi and Makoto Tatsuta, Internal Normalization, Compilation and Decompilation for System F, In: Proceedings of Tenth International Symposium on Functional and Logic Programming (FLOPS 2010), Lecture Notes in Computer Science 6009 (2010) 207--223, 査読有.

[5] Makoto Tatsuta, Non-Commutative First-Order Sequent Calculus, In: Proceedings of 18th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL2009), Lecture Notes in Computer Science 5771 (2009) 470--484, 査読有.

[6] Koji Nakazawa and Makoto Tatsuta, Strong normalization of classical natural deduction with disjunctions, Annals of Pure and Applied Logic 153 (1-3) (2008) 21--37, 査読有.

[7] Makoto Tatsuta, Types for Hereditary Permutators, In: Proceedings of Twenty-Third Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS2008) (2008) 83--92, 査読有.

[8] M. Tatsuta, Simple saturated sets for disjunction and second-order existential quantification, In: Proceedings of 8th International Conference on Typed Lambda Calculi and Applications (TLCA 2007), Lecture Notes in Computer Science 4583 (2007) 366--380, 査読有.

〔学会発表〕（計　１件）

[1] 龍田 真, 遺伝的置換子の型とTLCA未解決問題20番, 日本ソフトウェア科学会第25回大会 (2008), 査読無.

６．研究組織

(1)研究代表者

龍田　真　　(TATSUTA MAKOTO　　)

国立情報学研究所・情報学プリンシプル研究系・教授

研究者番号： 80216994