

機関番号：16401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007～2010

課題番号：19540190

研究課題名(和文) 超越整関数の複素力学系における特異な現象の研究

研究課題名(英文) Studies on complex dynamics of transcendental entire functions

研究代表者

諸澤 俊介 (MOROSAWA SHUNSUKE)

高知大学・教育研究部自然科学系・教授

研究者番号：50220108

研究成果の概要(和文)：有理関数と超越整関数の力学系の異なる点に着目し、主に超越整関数の複素力学系についての研究を行った。特異値は複素力学系の研究で重要な役割を果たす。特異値とは臨界値あるいは漸近値のことであり、漸近値は超越整関数にしか表れない。二つの特異値を持つ整関数の族を考え、そのパラメータ空間の双曲成分について結果を得た。また、超越整関数がジーゲル円板を持つ時に、それらが非有界になることと漸近値の関係について結果を得た。

研究成果の概要(英文)：From the view point of the difference between dynamics of rational functions and those of transcendental entire functions, I mainly studied complex dynamics of transcendental entire functions. Singular values play important roles in studying complex dynamics. They are critical values or asymptotic values and the latter appear in the only case of transcendental entire functions. I investigated families of entire functions with two singular values and obtained some results on hyperbolic components of the parameter spaces. Furthermore, I showed a relationship between unbounded Siegel disks and asymptotic values, if transcendental entire functions have Siegel disks.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：複素解析、複素力学系、超越整関数、複素誤差関数、特異値、双曲成分

## 1. 研究開始当初の背景

1980年代から活発になった現在の複素力学系の研究の重要な中心問題の一つは、2次多項式のパラメータ空間であるマンデルブロー集合の稠密生予想—双曲2次多項式の集合がパラメータ空間内で稠密な開集合となる—である。この2次多項式の研究は有理関数の研究の基本である。一方で、多種多様な

超越整関数についても、いくつかの関数について研究が行われていた。特に、有理関数では起こり得ない遊走領域を持つ整関数、ベーカー領域を持つ整関数などが調べられていた。また、いくつかの超越整関数のジュリア集合も特徴付けられていた。

## 2. 研究の目的

有理関数の力学系と超越整関数の力学系に

はいくつかの大きな違いがある。本研究の目的は、それらを踏まえて超越整関数の力学系特有の現象を考察することである。特に特異値に注目し研究を行った。特異値とは臨界値あるいは漸近値である。そして漸近値が超越整関数特有の特異値である。複素力学系の研究において特異値は重要な役割を果たす。ファトウ集合の周期成分との関係は良く知られており、それらはパラメータ空間とも密接に関係している。超越整関数は多種多様であり、特異値の数が無限異なることもある。そこでいくつかの具体的な超越整関数の族に関して考察を行う。まずはかなり研究が進んでいる指数関数の発展として、二つの漸近値を持つ関数として複素誤差関数を考える。さらに、それを含む関数族として構造有限型超越整関数に研究を発展させる。また、漸近値は長い研究の歴史を持つ値分布論でも詳しく研究されている。漸近値はさらに直接特異点と間接特異点に分類される。間接特異点を持つ整関数は無限個の臨界値を持つことが知られている。値分布論的な性質と力学系としての性質の関連を調べる。また、超越整関数の族を考えるとときに、関数等式を満たすものを考えることは有用である。特にシュレーダー関数等式を考察する。

### 3. 研究の方法

数学の一般的な研究方法として、個人研究を行う。科研費でパーソナルコンピュータを購入し、複素誤差関数などの関数による力学系の数値実験用のプログラムを自分で作成し、データを集める。それらにより問題の妥当性などを考察し、証明を考える。コンピュータ購入以外には科研費の多くは、研究打合せ、研究連絡、情報収集のための旅費と複素力学系関連図書及び複素解析学関連図書の購入に使われる。連携研究者である奈良女子大学の谷口雅彦教授とはパラメータ空間の研究について、日本工業大学の石崎克也教授とは関数等式及び値分布論との関連研究について密接に研究連絡を行う。また、2000年から2001年にドイツに滞在し、共同研究を行った Kiel 大学の Bergweiler 教授とも研究連絡をとる。超越整関数の力学系の研究者は海外に多く、Boston 大学の Devaney 教授やイギリス Open 大学の Rippon 教授とも研究連絡をとる。その為にも海外での力学系研究集会に出席する。

### 4. 研究成果

- (1) 特異値の挙動が複素力学系を決める。特異値とは臨界値あるいは漸近値のことである。現代の複素力学系の出発点として、二次多項式の研究がある。これはただ一つの有界な臨界値を持つ関数の族である。これを発展させた研究として三次多項式の力学系の研究がある。これは二つの有界な臨界値を持つ整関数であ

る。この力学系を考える場合には二つの臨界値のお互いの挙動も問題となる。一方でただ一つの漸近値を持つ超越整関数の力学系として指数関数のそれが研究されている。これらのことを踏まえて奈良女子大学の谷口雅彦教授と二つの特異値を持つ整関数の力学系を考察した。二つの特異値を持つ超越整関数としては三角関数が考えられるが、それらの特異値は臨界値である。我々が考えたのは構造有限型整関数で二つの特異値を持つものである。これらは二つの臨界値を持つ三次多項式、一つの臨界値と一つの漸近値を持つ単純象眼関数、二つの漸近値を持つ複素誤差関数のいずれかである。ミルナーの三次多項式のパラメータ空間の双曲成分の考察に従い、これらの関数族について双曲成分を考察した。これらの構造有限型整関数が完全不変成分を持つ十分条件を示した。また、それらの関数が捕獲成分に含まれる為のいくつかの十分条件を与えた。さらに具体的な例をいくつか構成した。



図1：捕獲成分に属するパラメータを持つ単純象眼関数のジュリア集合

- (2) 複素誤差関数の力学系について研究を行った。複素誤差関数は特異値としてちょうど二つの漸近値を持つ整関数である。これらは二つの複素パラメータを持つ関数族をなす。具体的には  $z \rightarrow a \int_{\gamma} \exp(-w^2) dw + b$  で与えられる整関数である。まずはパラメータの  $a$  と  $b$  が実数の場合を調べた。このようなものを実係数複素誤差関数と呼ぶ。実2変数なのでパラメータ空間を描くことができる。パラメータ空間の第1、第2象限の単純さと、第3、第4象限の複雑さを示した。さらに、二つの吸引不動点を持つ双曲成分及び、ただ一つの吸引2周期を持つ双曲成分がそれぞれた

だ一つであることと、それらの非有界性を示した。また、曲線に沿う放物型分岐の存在を示した。また、 $a \neq 0$  を複素数、

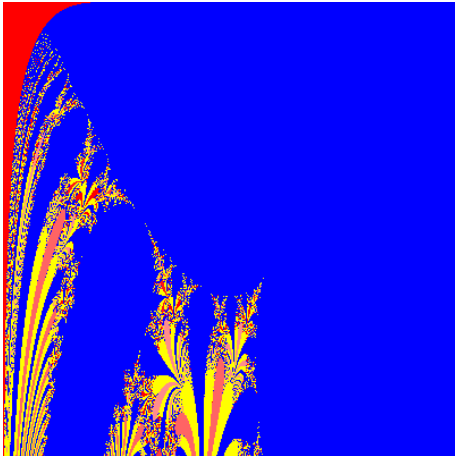


図 2 : 実係数複素誤差関数のパラメータ空間の第 4 象限

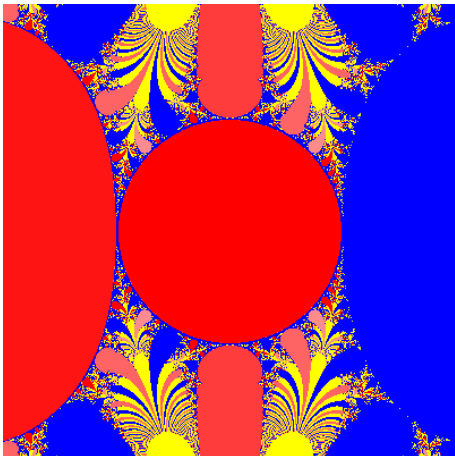


図 3 : 複素誤差関数の複素 1 変数部分族のパラメータ空間

$b = 0$  として、複素 1 変数の部分族のパラメータ空間を考えた。この場合には双曲成分はただ一つの吸引成分を持つもの  $A$ 、ただ一つの偶数周期  $2n$  の吸引周期を持つもの  $B_{\{n\}}$ 、二つの同じ吸引周期  $n$  を持つもの  $D_{\{n\}}$  のいずれかであることを示した。  $A$  以外の成分はすべて単連結であり、非有界となる。  $B_{\{1\}}$  と  $D_{\{1\}}$  はただ一つの成分からなる。さらに、各  $B_{\{n\}}$  と  $D_{\{n\}}$  は  $A$  と接する成分を含むことを示した。

- (3) ジーゲル円板の境界が特異軌道の閉包に含まれることは良く知られている。しかし、このことは必ずしも特異値がその境界に存在することを意味してはいな

い。 Rempe は指数関数の場合に非有界なジーゲル円板を持てば、その境界に漸近値を含むことを示した。構造有限型超越整関数の持つ非有界ジーゲル円板と漸近値のその境界上での存在について結果を得た。特に複素誤差関数の場合にはジーゲル円板が非有界であることと、その境界上に漸近値が存在することが同値であることが示された。また、正弦関数のジーゲル円板についても考察した。正弦関数は特異値として二つの臨界値だけを持つ超越整関数である。この場合にはジーゲル円板は常に有界となることが示された。さらに、この証明は  $z \rightarrow \text{Sin}(z)/z$  に応用できる。したがって、

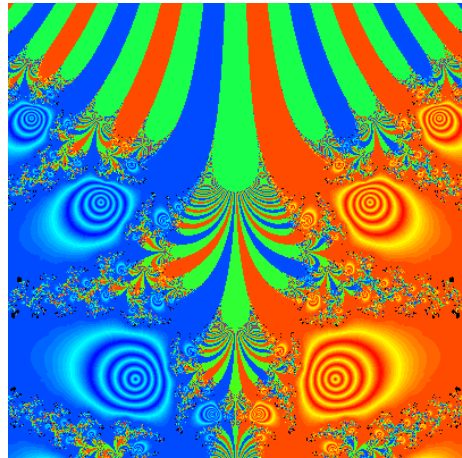


図 4 : 二つの非有界ジーゲル円板を持つ複素誤差関数のジュリア集合

この関数がジーゲル円板を持てば常に有界である。一方で、この関数は間接特異点を持つ超越整関数である。そして、この間接特異点を境界に持つ有界なジーゲル円板を構成することができた。

- (4) 関数等式  $f(G(z))=R(f(z))$  の有理型解の存在定理を与え、さらに  $f$  のもとでの  $G$  と  $R$  の複素力学系的性質を調べた。特に  $f$  を多項式として、この関数等式を半共役と見て、  $G$  のジュリア集合が  $f$  により  $R$  のジュリア集合に写ることを示した。
- (5)  $R$  は原点を反発不動点とし、その乘法因子を  $\lambda$  とする有理関数とする。シュレーダーの関数等式とは  $f(\lambda z)=R(f(z))$  のことを言い、  $f$  をシュレーダー関数と呼ぶ。石崎-柳原、奥山-Drasin により、  $R$  の吸引不動点、放物型不動点と  $f$  の漸近値の関係が示されている。さらに石崎-柳原は値分布論で研究されている  $f$  のジュリアの方向と  $R$  のジュリア集合の関係について研究をしている。この方

法を用いて、シュレーダーの関数等式により定義される幾つかのシュレーダー関数について、漸近値の個数評価ができることが判った。また、ジュリア集合の非連続性に関連して、シュレーダー関数族の漸近値に関する非連続性についての問題提議を行った。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ①. Katsuya Ishizaki, Shunsuke Morosawa, Mitsunori Yakou, Meromorphic solutions of functional equations  $f(G(z))=R(f(z))$ , Complex Var. Elliptic Equ., 査読有, 「投稿中(掲載確定)」
- ②. 諸澤 俊介, Siegel disks of transcendental entire functions and singular values, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1699 (2010年9月) 68-72.
- ③. Katsuya Ishizaki, Shunsuke Morosawa, Mitsunori Yakou, Semi-conjugate functions in the complex plane, Report of Researches Nippon Institute of Technology, 査読無, 39(2010) 142--145.
- ④. Shunsuke Morosawa, Masahiko Taniguchi, Dynamics of structurally finite entire functions with two singular values, Comput. Methods Funct. Theory, 査読有, 9 (2009), 185--198.

[学会発表] (計7件)

- ①. 諸澤 俊介, Some questions on Schröder functions, 複素力学系とその関連分野の総合的研究, 2010年12月7日, 京都大学理学部
- ②. 諸澤 俊介, 超越関数特異値と複素力学系, 「等角写像論・値分布論」合同研究集会, 2010年12月4日, コラッセふくしま
- ③. 諸澤 俊介, Siegel disks of transcendental entire functions and singular values, 複素力学系とその関連分野の総合的研究, 2009年12月16日, 京都大学大学院人間・環境学研究科
- ④. 石崎 克也, Meromorphic Solutions of Functional equations  $f(G(z))=R(f(z))$ , 等角写像論・値分布論」合同研究集会, 2009年12月5日, 東北大学
- ⑤. Shunsuke Morosawa, Bifurcations of

error functions with real coefficients, Aspects of Transcendental Dynamics, 2008年6月19日 Jacobs University Bremen, Germany

- ⑥. 諸澤 俊介, Bifurcations of error functions with real coefficients, 複素力学系とその周辺分野の研究, 2007年9月3日, 京都大学数理解析研究所
- ⑦. 諸澤 俊介, Dynamics of complex error functions, The 15th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Application, 2007年7月31日, 大阪市立大学

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.kochi-u.ac.jp/morosawa/index.html>

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

諸澤 俊介 (MOROSAWA SHUNSUKE)  
高知大学・教育研究部自然科学系・教授  
研究者番号: 50220108

##### (2) 研究分担者

谷口 雅彦 (TANIGUCHI MASAHIKO)  
奈良女子大学・理学部・教授  
研究者番号: 50108974  
(H20→H22: 連携研究者)  
藤解 和也 (TOHGE KAZUYA)  
金沢大学・自然科学研究科・准教授  
研究者番号: 30260558  
(H19: 研究分担者、H20: 連携研究者)  
石崎 克也 (ISHIZAKI KATSUYA)  
日本工業大学・工学部・教授  
研究者番号: 60202991  
(H20→H22: 連携研究者)  
加藤 和久 (KATO KAZUHISA)  
高知大学・教育研究部自然科学系・教授  
研究者番号: 20036578  
(H19: 研究分担者、H20: 連携研究者)

##### (3) 連携研究者

なし