

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2011

課題番号：19540194

研究課題名 (和文) タイヒミュラー空間のプリーツ座標の大域的構成とその応用

研究課題名 (英文) Global construction of pleating coordinates of Teichmüller spaces and its applications

研究代表者

小森 洋平 (KOMORI YOHEI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：70264794

研究代表者の専門分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：複素解析、リーマン面、クライン群

### 1. 研究計画の概要

クライン群  $G$  とは  $PSL(2, \mathbb{C})$  の離散部分群であり、一次分数変換によってリーマン球面に等角に作用する。 $G$  が単連結な不連続領域  $U$  を持つとすると、商空間  $U/G$  は  $U$  の等角構造からリーマン面になる。一方リーマン球面を理想境界とする双曲3次元空間  $H^3$  を考えると、 $G$  はポアンカレ拡張によって  $H^3$  に等長的に作用する。ここでリーマン球面における  $G$  の極限集合の、 $H^3$  における凸閉包  $C$  を考える。すると  $C$  は  $H^3$  からの誘導距離により双曲平面と等長になるので、商空間  $C/G$  は  $C$  の双曲構造からリーマン面になる。このようにして得られた2つのリーマン面  $U/G$  と  $C/G$  は同相で、特に種数が  $g$  で穴の数が  $n$  とすると、 $(g, n)$  型のリーマン面のタイヒミュラー空間の2点を表すことになる。この2点間の距離を評価したい。

また  $C$  は双曲曲面の構造を持つが、一般には  $H^3$  の測地線層に沿って折れ曲がったプリーツ面になっている。この測地線層をクライン群  $G$  のプリーツ不変量という。つまりリーマン面  $C/G$  上には、折れ曲がった角度を測度とする、測度付き測地線層の構造が付加されている。広いクラスの  $G$  においては、リーマン面  $C/G$  の等角構造から  $G$  が決まる。よって  $G$  のプリーツ不変量からリーマン面  $C/G$  の等角構造を特徴づけることを問題としたい。

以上より本研究主要な目的は次の2つの問題である。

(1) クライン群  $G$  から定まる2つのリーマン面  $U/G$  と  $C/G$  の違いの評価。

(2) クライン群  $G$  のプリーツ不変量によるリーマン面  $C/G$  の等角構造の決定。

### 2. 研究の進捗状況

本研究の主目的は「凸核の境界」という双曲構造と「不連続領域」という等角構造との間の相互関係を追求することである。以下に具体的な課題と進捗状況を箇条書きする。

(1)  $(g, n)$  型の終端  $b$ -群の変形空間 (マスクット・スライス) のプリーツ座標の構成。この課題は高次元の空間を扱うため未だ一般論が展開できずにいたのだが、昨年度ウォーリック大学の Series 教授が  $(1, 2)$  型のマスクット・スライスのプリーツ座標の構成に関する論文を発表したので、今年度 Series 教授と研究連絡を行う予定である。

(2)  $(g, n)$  型の終端  $b$ -群における Thurston の  $K=2$  予想の反例の具体的構成。この課題については2007年にモンペリエ大学を訪問した際に Silhol 教授と議論をした結果を論文で発表した。一部近似計算を用いる箇所があり、現在その部分が理論化できるか検討を行っている。

(3) 擬フックス空間の正則切断から定まるタイヒミュラー空間のプリーツ座標の構成。この課題についてはベアス・マスクット スライスのプリーツ座標の構成について Parkonen 氏との共同研究を論文で発表した。その後マスクット・スライスへの退化との関係を連携研究者の山下靖 (奈良女子大) と調べて、フリブール大学での双曲体積の国際集会で発表した。

(4) プリーツ多様体の構造とタイヒミュラー空間の可視化。この課題については、最近リーマン面の正則族の可視化に取り組んでいる。具体的には位数2の自己同型を持つ種数2のリーマン面の正則族の構成とその正則切断の決定ができ論文として発表した。

### 3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由)

(g,n)型の終端 b-群における Thurston の  $K=2$  予想の反例の具体的構成については、当研究を開始する以前に発表した結果を、Jankins-Strebel 微分のアイデアを用いてより根源的に「凸核の境界」の双曲構造と「不連続領域」の等角構造との間の相互関係を調べることができた。また擬フックス空間の正則切断から定まるタイヒミュラー空間のプリーツ座標の構成についても Minsky の Pivot 定理を応用してベアス・マスケット スライスというパラメータ付きのスライスについて、そのプリーツ座標の構成ができた。さらにタイヒミュラー空間の可視化の問題について、従来は境界のフラクタル幾何的な性質にのみ注目していたが、リーマン面の正則族の可視化という新しい対象を考察することができた。

### 4. 今後の研究の推進方策

(1) (g,n) 型の終端 b-群の変形空間 (マスケット・スライス) のプリーツ座標の構成が、今後の最大の問題である。このテーマについてはこれまで大きな進展がなかったので、昨年度ウォーリック大学の Series 教授が発表した (1,2) 型のマスケット・スライス のプリーツ座標の構成を理解して、さらなる一般化を目指したい。

(2) (g,n)型の終端 b-群における Thurston の  $K=2$  予想の反例の具体的構成についてはこれまでに得られた数値計算に依存する議論の箇所の理論化を行う。具体的には双曲四角形のモジュラスを計算 (または評価) するための特殊関数の求めることである。

(3) タイヒミュラー空間の可視化については、最近取り組んでいる種数 2 のリーマン面の正則族の構成とその正則切断の決定の方法を、一般の種数のリーマン面の正則族の場合に発展させられるかを考察する。

### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 15 件)

① Yoichi Imayoshi, Yohei Komori and Toshihiro Nogi,

On holomorphic sections of a certain Kodaira surface revisited, Riemann Surfaces, Harmonic Maps and Visualization, OCAMI Studies, 査読有り、Volume 3 (2009), 151-162.

② Yoichi Imayoshi, Yohei Komori and Toshihiro Nogi,

Holomorphic sections of a holomorphic family of Riemann surfaces induced by a certain Kodaira surface, Kodai Mathematical Journal. 査読有り、Vol. 32, No. 3 (2009), 450-470.

③ Yohei Komori,

Modulus inequality for grafting and its application, Complex Analysis and its Applications, OCAMI Studies, 査読有り、Volume 2 (2008), 249-254.

④ Yohei Komori,

Drawing the complex projective structures On once-punctured tori, RIMS 研究集会報告集、査読無し、1605 巻、(2008), 81-89.

⑤ Yohei Komori and Jouni Parkonen,

On the shape of Bers-Maskit slices, Ann. Acad. Sci. Fenn. 査読有り、32 (2007), 179-198.

[学会発表] (計 15 件)

① 小森洋平,

ある種数 2 のリーマン面の正則切断について、日本数学会、2010年3月24日、慶応義塾大学

② 小森洋平,

Holomorphic sections of a holomorphic family of Riemann surfaces induced by a certain Kodaira surface, ネバリンナ・コロキウム、2009年9月8日、京都大学

③ 小森洋平,

タイヒミュラー空間の複素解析の側面、力学系集会、2008年5月19日、九州大学

④ 小森洋平,

On counterexample to the equivariant  $K=2$  conjecture, 日本数学会、2007年9月23日、東北大学

⑤ Yohei Komori,

Margulis tubes and bending loci of punctured torus groups, Workshop Hyperbolic Volume, 2007年7月3日、フリブール大学 (スイス)