

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007～2010

課題番号：19540194

研究課題名(和文) タイヒミュラー空間のプリーツ座標の大域的構成とその応用

研究課題名(英文) Global construction of pleating coordinates of Teichmuller spaces and its applications

研究代表者

小森 洋平 (KOMORI YOHEI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：70264794

研究成果の概要(和文)：リーマン面  $X$  とその上の単純閉測地線  $C$  で  $\theta$ -grafting して得られるリーマン面  $Y$  のタイヒミュラー距離を評価した。その応用として(1,1)型の regular  $b$ -群の等角境界と凸核境界のタイヒミュラー距離を評価し、 $K=2$  予想の反例を具体的に構成した。また単純閉測地線に関する長さ関数を用いて、2次元と3次元のタイヒミュラー空間のサーストン・コンパクト化を、有限次元実射影空間内の凸多面体として実現した。

研究成果の概要(英文)：We estimate the Teichmuller distance between Riemann surfaces  $X$  and  $Y$  which is obtained from  $X$  by  $\theta$ -grafting along a simple closed geodesic  $C$ . As an application we estimate the Teichmuller distance between the conformal boundary and the convex core boundary of some regular  $b$ -groups of type (1,1) one of which gives a counterexample of  $K=2$  conjecture. Also by means of geodesic length functions, we realize Teichmuller spaces of dimension 2 and 3 as convex polyhedron in real projective spaces.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：複素解析、リーマン面、クライン群

## 1. 研究開始当初の背景

クライン群のプリーツ不変量に関する先駆的な仕事として Keen と Series による(1,1)型の終端  $b$ -群の変形空間のプリーツ座標の構成がある。(1,1)型の終端  $b$ -群  $G$  から定まるリーマン面  $D/G$  は1点穴空きトーラスになり、その等角構造の変形空間は1次元のタイヒミュラー空間である。この空間は

$G$  の擬等角変形空間と同一視できて、マスクット・スライスと呼ばれている。リーマン面  $D/G$  のプリーツ不変量がこの空間の大域的な座標になることを示したのが彼らの主結果であった。このようにプリーツ不変量を用いたタイヒミュラー空間の大域的座標をプリーツ座標という。その後このプリーツ不変量の理論を他のクライン群で考察する研究が行われてきた。

1次元のタイヒミュラー空間におけるプリーツ座標については、マスケット・スライスとライリー・スライスに関しては Keen と Series が、ケーベ・スライスについては Parkkonen がプリーツ座標の存在を示した。アール・スライスのプリーツ座標については研究代表者である小森により、論文 (Y. Komori and C. Series, Pleating coordinates for the Earle embedding, Ann. Fac. de Sci. de Toulouse, X(2001), 69-105.)

において、その境界の位相的性質については論文 (Y. Komori, On the boundary of the Earle slice for punctured torus groups, Lond. Math. Soc. Lec. Notes. 299 (2003), 293-304.) において調べられた。

さらにベアス・スライスのプリーツ座標については論文 (Y. Komori and T. Sugawa, Bers embedding of the Teichmüller space of a once-punctured torus, Conform. Geom. Dyn. 8 (2004), 115-142.) において、その境界の位相的性質については論文 (Y. Komori, T. Sugawa, M. Wada and Y. Yamashita, Drawing Bers embeddings of the Teichmüller space of once-punctured tori, Experimental Mathematics, Vol. 15 (2006), No.1, 51-60.)

において調べられた。連携研究者の宮地は論文 (H. Miyachi, Cusps in complex boundaries of one-dimensional Teichmüller space, Conform. Geom. Dyn. 7 (2003), 103-151.) において上記のスライスの境界のフラクタル的性質について調べた。1点穴空きトーラス群の終端不変量については Minsky が、フォード基本領域の組み合わせ構造については Jorgensen 及び、連携研究者の作間がプリーツ不変量との関連を込めて調べていた。しかしいずれの結果も1点穴空きトーラスのタイヒミュラー空間という、複素1次元のタイヒミュラー空間の話であり、より一般の  $(g, n)$  型のリーマン面の変形空間である高次元のタイヒミュラー空間でプリーツ座標を考えることは未解決の問題であった。

クライン群のプリーツ不変量の別の応用として、不連続領域への等角な作用と凸閉包の境界への等長な作用のそれぞれから得られるリーマン面の間のタイヒミュラー距離を評価する問題が考えられる。2003年からの Charles Matthews との共同研究で小森は、Keen と Series が調べた  $(1, 1)$  型の終端  $b$ -群とそのプリーツ不変量を用いると、このタイヒミュラー距離が  $\log 2$  以上になる例が構成できた。これは長年未解決だった Thurston の  $K=2$  予想の反例を与えており論文 (Y. Komori and C. Matthews, An explicit counterexample of the equivariant  $K=2$  conjecture, Conform. Geom. Dyn. 10

(2006), 184-196.) で発表した。この問題では終端  $b$ -群で一意化される1点穴空きトーラスの周期を数値計算する必要があったが、2005年にローザンヌで開催されたネバリンナ・コロキウムに参加した際 Buser と Silhol 両氏と直接議論することで、彼らの超楕円曲線の周期の数値計算の理論が、一般の  $(g, n)$  型の終端  $b$ -群で Thurston の  $K=2$  予想の反例を探す手がかりになることが分かった。

## 2. 研究の目的

クライン群  $G$  とは  $PSL(2, C)$  の離散部分群であり、一次分数変換によってリーマン球面に等角に作用する。 $G$  が単連結な不連続領域  $D$  を持つとすると、商空間  $D/G$  は  $D$  の等角構造からリーマン面になる。一方リーマン球面を理想境界とする双曲3次元空間  $H^3$  を考えると、 $G$  はポアンカレ拡張によって  $H^3$  に等長的に作用する。ここでリーマン球面における  $G$  の極限集合の、 $H^3$  における凸閉包  $C$  の境界  $\partial C$  を考える。すると  $\partial C$  は  $H^3$  からの誘導距離により双曲平面と等長になるので、商空間  $\partial C/G$  は  $\partial C$  の双曲構造からリーマン面になる。このようにして得られた2つのリーマン面  $D/G$  と  $\partial C/G$  は同相で、特に種数が  $g$  で穴の数が  $n$  とすると、 $(g, n)$  型のリーマン面のタイヒミュラー空間の2点を表すことになる。この2点間の距離を評価することは重要な問題である。また  $\partial C$  は双曲曲面の構造を持つが、一般には  $H^3$  の測地線層に沿って折れ曲がったプリーツ面になっている。この測地線層をクライン群  $G$  のプリーツ不変量という。つまりリーマン面  $\partial C/G$  上には、折れ曲がった角度を測度とする、測度付き測地線層の構造が付加されている。広いクラスの  $G$  においては、リーマン面  $\partial C/G$  の等角構造から  $G$  が決まる。よって  $G$  のプリーツ不変量からリーマン面  $\partial C/G$  の等角構造を特徴づけることは重要な問題である。

以上より本研究課題の目標として次の2つの問題を考察した。

- (1) クライン群  $G$  から定まる2つのリーマン面  $\Omega/G$  と  $\partial C/G$  の違いの評価。
- (2) クライン群  $G$  のプリーツ不変量によるリーマン面  $\partial C/G$  の等角構造の決定。

## 3. 研究の方法

関数論、低次元トポロジー、双曲幾何など種々の分野が相互に交差している課題なので、最も重要なことは連携研究者が各自の専

門知識を生かして相互に緊密な研究協力を  
行うことである。そのために、具体的な研究  
計画・方法として以下のことを行った。

(1)  $(g, n)$  型の終端  $b$ -群の変形空間 (マ  
スキット・スライス) のプリーツ座標の構成  
については、マスキット・スライスに精通し  
ている今吉、小森、宮地が担当した。

(2)  $(g, n)$  型の終端  $b$ -群における  
Thurston の  $K=2$  予想の反例の具体的構成  
については、すでに  $(1, 1)$  型で結果を得て  
いる小森がオクラホマ州立大学 C. Matthews  
を研究協力者として担当した。また一般の  
 $(g, n)$  型の研究にはスイス EPFL の P. Buser  
とフランス・モンペリエ大学の R. Silhol 両  
氏による実超楕円曲線の周期の数値計算が  
有効であることが分かってきた。

(3) 擬フックス空間の正則切断から定まる  
タイヒミュラー空間のプリーツ座標の構成  
については、まずはベアス・スライスが考察  
対象である。そのためには擬等角写像、特に  
タイヒミュラー写像に関する知識と経験が  
重要になると思われるので、今吉、佐官、須  
川が中心となって研究を行った。

(4) 変形空間の境界のフラクタル幾何につ  
いては1次元の場合にカスプの状況を決定  
した宮地が主に担当した。ハウスドルフ次元  
の評価が考察できる可能性もあるので、  
複素力学系の知識のある小森と須川も担当  
した。

(5) タイヒミュラー空間の可視化について  
はコンピュータグラフィックの知識が不可  
欠なので、1次元のベアス・スライスの場合  
の経験を生かして須川と山下が担当した。

#### 4. 研究成果

本研究の主目的は「凸核の境界」という双  
曲構造と「不連続領域」という等角構造と  
の間の相互関係を追求することであった。  
以下に 具体的な課題についての成果を簡  
条書きする。

(1)  $(g, n)$  型の終端  $b$ -群の変形空間(マ  
スキット・スライス)のプリーツ座標の構成。  
この課題は高次元の空間を扱うため未だ一  
般論が展開できずにいたのだが、プリーツ  
座標というタイヒミュラー空間の幾何的な  
座標の研究を高次元タイヒミュラー空間で  
扱う課程で、タイヒミュラー空間のサー  
ストンコンパクト化の有限次元での実現問  
題を考察した。リーマン面の双曲計量に  
関する測地線の長さをタイヒミュラー空間上の

関数(長さ関数)と考え、すべての単純閉測  
地線の長さ関数の比を用いて、タイヒミュ  
ラー空間を無限次元実射影空間に相対コ  
ンパクトに埋め込むことができる。この無  
限次元実射影空間内でのタイヒミュラー  
空間のコンパクト化をサーストンコンパ  
クト化という。サーストンコンパクト化は有  
限次元の円板であるのに対し、それが実現  
されている土台の実射影空間は無限次元  
なので、サーストンコンパクト化の幾何構  
造を解析するのは未だに難しい問題である。  
そこで次の問いが考えられる:「有限個の  
単純閉測地線の長さ関数の比を用いて、タイ  
ヒミュラー空間を有限次元実射影空間の領  
域として実現し、さらにその境界がサー  
ストン境界と一致するようになれるか。」この  
問いに対し、今年度タイヒミュラー空間の  
次元が2次元と3次元の場合に肯定的に問  
題を解決することができた。この結果はフ  
リブール大学(スイス)の Gendulphe との共  
同研究で、大阪市立大学数学研究所プレ  
プリントにまとめた。日本数学会の函数論分  
科会、および Oberwolfach 研究所(ドイツ)  
でのタイヒミュラー理論の研究集会でも招  
待講演を行った。

(2)  $(g, n)$  型の終端  $b$ -群における  
Thurston の  $K=2$  予想の反例の具体的構  
成。この課題については2007年にモンペ  
リエ大学を訪問した際に Silhol 教授と  
議論をした結果を論文で発表した。一部近  
似計算を用いる箇所があり、その部分が理  
論化できるか検討を行った。

(3) 擬フックス空間の正則切断から定まる  
タイヒミュラー空間のプリーツ座標の  
構成。この課題についてはベアス・マスキ  
ット・スライスのプリーツ座標の構成につ  
いて Parkonen 氏との共同研究を論文で  
発表した。その後マスキット・スライスへ  
の退化との関係を連携研究者の山下と調  
べて、フリブール大学での双曲体積の国際  
集会で発表した。

(4) 変形空間の境界挙動については1次  
元の場合にカスプの状況を決定した連帯研  
究者の宮地がさらなる考察を進めた。しか  
しハウスドルフ次元の評価など定量的な結  
果を得ることは今後の課題として残った。

(5) プリーツ多様体の構造とタイヒミュ  
ラー空間の可視化。この課題については、  
リーマン面の正則族の可視化に取り組み、  
具体的には位数2の自己同型を持つ種数2  
のリーマン面の正則族の構成とその正則切  
断の決定ができ論文として発表した。大阪  
市立大学で開催された国際学術シンポジウ

ム「リーマン面, 調和写像と可視化」において新たな可視化のアプローチが内外の研究者から数多く提示され、小森は組織委員として集会に深く関わる事により、多くのアイデアと意見交換を参加者と行なう事ができた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

① Yoichi Imayoshi, Yohei Komori and Toshihiro Nogi,  
On holomorphic sections of a certain Kodaira surface revisited, Riemann Surfaces, Harmonic Maps and Visualization, OCAM I Studies, Volume 3 (2009), 151-162. 査読有り

② Yoichi Imayoshi, Yohei Komori and Toshihiro Nogi,  
Holomorphic sections of a holomorphic family of Riemann surfaces induced by a certain Kodaira surface, Kodai Math. J. Vol. 32, No. 3(2009), 450-470. 査読有り

③ Yohei Komori,  
Drawing the complex projective structures on once-punctured tori,  
Geometry related to the theory of integrable systems  
RIMS 研究集会報告集 no.1605 (2008), 81-89. 査読無し

④ Yohei Komori,  
Modulus inequality for grafting and its application,  
Proceedings of the 15th ICFIDCAA (2008), 249-255. 査読有り

⑤ Yohei Komori and Jouni Parkkonen,  
On the shape of Bers-Maskit slices,  
Ann. Acad. Sci. Fenn. 32 (2007), 179-198. 査読有り

⑥ Yoichi Imayoshi,  
A construction of holomorphic families of Riemann surfaces over the punctured disk with given monodromy,  
Handbook of Teichmuller spaces, Volume 2. (2007), 93-130, 査読有り

⑦ Kenichi Sakan,  
On bi-Lipschitz type inequalities for

quasiconformal harmonic mappings,  
Ann. Acad. Sci. Fenn. 32 (2007), 579-594. 査読有り

⑧ Hiroataka Akiyoshi, Makoto Sakuma, Masaaki Wada and Yasushi Yamashita,  
Punctured torus groups and 2-bridge knot groups I,  
Lecture Notes in Mathematics, 1909,  
Springer, 2007, xliv+252 pp. 査読有り

⑨ Toshiyuki Sugawa,  
The Alexander transform of a spirallike function,  
Journal Math. Anal. Appl. 325(2007)608-611, 査読有り

⑩ Hideki Miyachi,  
A reduction for asymptotic Teichmuller spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. 32 (2007), 55-71. 査読有り

[学会発表] (計10件)

① 小森洋平,  
Polyhedral realization of a Thurston compactification,  
Oberwolfach Workshop " Teichmuller Theory", 2010年12月3日、Oberwolfach 研究所 (ドイツ)

② 小森洋平,  
Cook hat and crown,  
日本数学会秋期総合分科会、2010年9月27日、名古屋大学、

③ 小森洋平,  
ある種数2のリーマン面の正則切断について、  
日本数学会春期総合分科会、2010年3月24日、慶応義塾大学

④ 小森洋平,  
Holomorphic sections of a holomorphic family of Riemann surfaces induced by a certain Kodaira surface, ネバリンナ・コロキウム、  
2009年9月8日、京都大学

⑤ 小森洋平,  
タイヒミュラー空間の複素解析的側面、力学系集會、2008年5月19日、九州大学

⑥ 小森洋平  
Drawing the complex projective structures on once-punctured tori  
研究集会「可積分系に関わる幾何学」、2007年9月7日、京大数理研

⑦ 小森洋平

On counterexamples to the equivariant  $K = 2$  conjecture

日本数学会関数論分科会、2007年9月24日、東北大学

⑧小森洋平、

Drawing the complex projective structures on once-punctured tori

微分幾何セミナー、7月12日、マックスプランク研究所（ドイツ）

⑨小森洋平、

Margulis tubes and bending loci of punctured torus groups, Workshop Hyperbolic Volume, 2007年7月3日、フリブール大学(スイス)

⑩小森洋平、

Drawing the complex projective structures on once-punctured tori

幾何セミナー、6月18日、モンペリエ大学（フランス）

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小森 洋平 (KOMORI YOHEI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：70264794

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

今吉 洋一 (IMAYOSHI YOICHI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30091656

佐官 謙一 (SAKAN KENICHI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：70110856

作間 誠 (SAKUMA MAKOTO)

広島大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30178602

須川 敏幸 (SUGAWA TOSHIYUKI)

東北大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号：30235858

宮地 秀樹 (MIYACHI HIDEKI)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：40385480