様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年５月２６日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007　～　2009
課題番号：19540211
研究課題名（和文）　２次元球面の力学系の組合せ構造とフラクタル構造
研究課題名（英文）　Combinatorial structure and fractal structure of dynamics on the two-dimensional sphere

研究代表者
亀山　敦（KAMEYAMA　ATSUSHI）
岐阜大学工学部教授
研究者番号：00243189

研究成果の概要（和文）：ジュリア集合がカントール集合になる場合に、そのコーディングの重複度がとりうる値について調べた。次数 d の有理関数で、１対１の幾何学的コーディングがある場合、幾何学的コーディングの重複度はつねに d のベキであり、さらにある条件をみたすときは、任意の d のベキに対しそれが重複度になるような幾何学的コーディングがあることを示した。また、ジュリア集合への１対１の幾何学的コーディングが存在しないが、2 回合成についてはそのようなものが存在する有理関数の例を発見した。

研究成果の概要（英文）：We investigate the multiplicity of codings of Julia sets homeomorphic to the Cantor set. It is proved that the multiplicity of any geometric coding of the Julia set for a rational map of degree d is the power of d if there exists a one-to-one geometric coding, and under an additional condition any power of d can be the multiplicity of some geometric coding. Moreover, we find rational maps f whose Julia set has no one-to-one geometric coding, but the Julia set with the second power of f has a one-to-one geometric coding.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	**500,000**	**150,000**	**650,000**
2008 年度	**500,000**	**150,000**	**650,000**
2009 年度	**600,000**	**180,000**	**780,000**
年度			
年度			
総　計	**1,600,000**	**480,000**	**2,080,000**

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：ジュリア集合・記号力学系

１．研究開始当初の背景

一次元複素力学系の研究は、この二十数年ほどの間に特に発展しさまざまな研究がなされてきた。一次元複素力学系（リーマン面の有理写像の力学系）の理論がうまく行く理由のひとつに、正則性という強い仮定のために（実で考えると二次元であるが）実一次元的力学系のよい性質を多く残しているという点があげられる。反対に、実力学系で証明できないことを複素を使って証明できるという一面もある。しかし、強い結びつきがあるにも関わらず、実一次元力学 系と複素一次元力学系の間の移行には多くの困難が存在する。

本研究においては、実力学系と複素力学系の間のさまざまな連関の中でも、特に kneading 不変量とサーストン同値（イソトピー同値の一種）の関係に注目する。以降では、分岐被覆と言った場合、critical point の軌道が有限集合であることを仮定する。また、分岐被覆の写像類とはサーストン同値による同値類のことである。サーストンの理論により、リーマン球面の位相的な分岐被覆が有理写像とサーストン同値かどうかを判別する判定基準が知られている[T1][DH]。一方、実一次元力学系においては kneading 不変量は非常に都合のよい不変量として知られている。この不変量が（実軸に制限したときの）写像類を完全に分類する不変量であるということが本研究の発想の原点となっている。

ここで、実一次元と実二次元の違いは大いにある。つまり、kneading 不変量は写像が与えられればすぐに計算できるものだが、球面の分岐被覆についてはそのような不変量はないし、一般に与えられたふたつの分岐被覆が同じ写像類に属すかどうかを判定するのは非常に難しい。また、kneading 不変量を使って kneading determinant と呼ばれるベキ級数がミルナーとサーストン[MT]により定義され、力学系のゼータ関数の逆数になっていることが示されているが、球面の分岐被覆について はそのようなよい性質は知られていない。この隔たりを何とか解消できないだろうか、というのが本研究を始める最も大きな動機である。この方面の研究は申請者による[Ka2]の後、[P][N]などがある。

もうひとつの研究背 として、フラクタルの考え方がある。マンデルブロート[Ma]以来、さまざまな方向へ向かって発展していったフラクタルの数学の中でも、位相的な自己相似性[Hu][Ha]とシンボル列の関係に注意する。力学系をシンボル列を使って表すアイディアは以前からあったが、それを推し進めて、シンボル列で表さ れる図形を幾何学的対象として扱うことの重要性[Ki][Ka1]は、フラクタルの考え方によって認識されはじめた。本研究の対象である複素力学系には ジュリア集合というフラクタル集合が付随することを考えると、分岐被覆の組合せ構造と、ジュリア集合のフラクタルとしての幾何的構造の関連に新しい数学が あることが期待できる。

[DH] A. Douady and J. H. Hubbard, A Proof of Thurston's Topological Characterization of Rational Functions, Acta. Math., 171, 1993, 263-297

[Ha] M. Hata, On the Structure of Self-similar Sets, Japan J. Appl. Math., 2, 1985, 381-414

[Hu] J. E. Hutchinson, Fractals and Self-similarity, Indiana Univ. Math. J., 30, 1981,713-747

[Ka1] A. Kameyama, Self-similar Sets from the Topological Point of View, Japan J. Ind. Appl. Math., 10, 1993, 85-95

[Ka2] A. Kameyama, The Thurston equivalence for postcritically finite branched coverings, Osaka J. Math., 2001, 38, 565-610

[Ki] J. Kigami, Analysis on Fractals, Cambridge University Press, 2001

[Ma] B. Mandelbrot, Fractals, Form, Chance and Dimension, Freeman, San Francisco, 1977

[MT] J. Milnor and W. Thurston, On iterated maps of the interval, in Dynamical Systems, Lect. Notes in Math. 1342, ed by J. C. Alexander, 465-563, Springer, 1988

[N] V. Nekrashevych. Self-similar groups, vol 117 of Math. Surveys and Monographs. AMS, Providence, 2005.

[P] K. M. Pilgrim. An algebraic formulation of Thurston’s combinatorial equivalence, Proc. AMS, 2003, 131, 3527-3534

[T1] W. P. Thurston, On the combinatorics of iterated rational maps, preprint, 1985

２．研究の目的

研究の目標を具体的に述べると、

（１）与えられた分岐被覆がどの写像類に属すかを判定すること。

（２）ユークリッド空間の自己アファイン・タイリングの類似物である双曲平面のジュリア・タイリングのコーディングを調べること。

（３）シェルピンスキー・ガスケットの高次元対応物の追求。

（１） について、実一次元力学系における kneading 不変量のような、扱いやすい不変量を発見することが挙げられる。あるいは、判定のためのアルゴリズムを発見することも、それに準ずる結果である。また、過去の研究[Ka2]で部分的に行ったことの拡張として、「写像類半群」の構造を明らかにすることをも目指す。

（２）[Ka3]によると、（１）の問題の困難性がジュリア集合のコーディングの問題に現れることがわかってきた。マルチフラクタルを含め、コーディングへの理解を深めることも目標である。これらを通して、2 次多項式の場合のような、パラメータ空間と力学系の相空間の関係を記述することも期待される。さらに、ゼータ関数との関係を明らかにすることも大きな目標のひとつである。

（３）普通の幾何学でいう線分に対応するものが、フラクタルではシェルピンスキー・ガスケットである。フラクタルでは、その高次元化ができていない。球面の幾何に関連して、その高次元対応物を見つけることが期待される。

[Ka2] A. Kameyama, The Thurston equivalence for postcritically finite branched coverings, Osaka J. Math., 2001, 38, 565-610

[Ka3] A. Kameyama, Coding and tiling of Julia sets for subhyperbolic rational maps. Adv. Math. **200** (2006), 217 -- 244

３．研究の方法

研究は、ほとんど、単独によるものである。経費のほとんどは、参考資料のための図書に費やし、それ以外には発表のための旅費として使用した。一部を、突発的に必要となったパソコン等の購入にあてた。

研究の主たる部分は、数学的定理を証明することにあるため、研究方法としては、ノートにおける手計算である。ただし、今回は膨大な代数計算の必要が出てきたため、数式処理ソフトウェアによる計算も援用した。また、具体例を作るためと、発表の資料のため、プログラミング言語 Ruby による、コンピュータ画像を作成した。

４．研究成果

f をリーマン球面 $\bar{\mathbb{C}}$ からそれ自身への次数 d の 双曲的有理関数とする。J を f のジュリア集合とする。d シンボルの片側フルシフト (σ,Σ) から、f の J への制限への位相的半共役を J のコーディングと呼ぶ。特に、下に定めるような「geometric coding tree」 から定まるコーディングのことを幾何学的コーディングと呼び、研究対象とする。

定義

C を f の critical point 全体の集合とする。$P=\{f^k(c)|c\in C,k>0\}$ とする。

定義

d シンボルの有限列の集合 $W_k=\{1,2,\cdots,d\}^k$ と片側無限列の集合 $\Sigma=\{1,2,\cdots,d\}^N$ を考える。

定義(geometric coding tree)

基点として $\underline{x}\in\bar{\mathbb{C}}$-P を決めておく。$\underline{x}$ を始点とし $f^{-1}(\underline{x})$ の点を終点とする $\bar{\mathbb{C}}$-P 内のパス l_i (i=1,2,…, d) を考える。このパスの組 r=(l_i) を radial と呼ぶ。l_i の終点を x_i と書くとき,$\{x_i\}=f^{-1}(\underline{x})$ であれば proper radial と呼ぶ。

r=f r' となる別の radial r' がないとき、r は prime という。

radial r が決まると、以下のように geometric coding tree が作られ、幾何学的コーディング $\phi:\Sigma\to J$ が決まる。

$w=w_1w_2\cdots w_k\in W_k$ に対し，パス l_w を帰納的に決める:

l_w が決まったとき l_{iw}(i=1,2,…,d) は、 l_i と 「$f^{-1}(l_w)$ の連結成分のうち x_i から始まるもの」を結んだパス。l_w の終点を x_w と書くことにし、$\phi(i_1i_2\cdots)=\lim_{k\to\infty}x_{i_1i_2\cdots i_k}$ とする。

以前得た結果からは次のようなことがわかっている。

定義(重複度)

raial r に対し、次をみたす非負整数 m(r) が定まる。これを φ の重複度という。

(1) 任意の $z\in J$-P に対して $\#\phi^{-1}(z)\geqq m$,

(2) リュービッチ測度に関してほとんどすべての $z\in J$ に対して $\#\phi^{-1}(z)=m$。

コーディング空間そのものの構造を調べることはなかなか難しいので、とりうる重複度がどんなものになるかだけでもわかるとよい。

$M(f)=\{m(r)|r$ は radial$\}$, $M'(f)=\{m(r)|r$ は prime radial$\}$ とおく。

[Ka3]において、次の予想をした。

1. 重複度 1 となる radial r が必ずある。
2. $f(z)=z^2-3$ のとき、r が prime ならば $m(r)=1$ または 2。

最初の予想についてはまだ不明だが、2 番目の予想は、今から述べるように間違っていた。

定理
f は subhyperbolic であるとする。radial r に対して φ が同相であれば重複度は、d のベキか 0 である。さらに、不動点以外の critical point は order 1（重複度 2）で、その軌道は不動点を通らず、互いに交わらないとすると $M'(f)=\{d^k|k=0,1,2,...\}$

φ がいつ同相になるかについては、次のことがわかる。

定理
f が subhyperbolic のとき、次は同値である。

1. ある n>0 について、f^n の radial r が存在して、f^n についての幾何学的コーディング φ は同相写像である。
2. 吸引的不動点 p があり、その immediate attracting basin $A_0(p)$ は postcritical set P を含んでいる。
3. f は hyperbolic であり、J はカントール集合である。
4. f は hyperbolic であり、ファトウ集合は連結である。
5. $\bar{C}$-P 内の任意の単純閉曲線 γ に対し、ある n>0 があって $f^{-n}(\gamma)$ のすべての連結成分は $\bar{C}$-P 内で自明な閉曲線である。

定理
f は subhyperbolic とする。radial r に対して、φ が同相であることと、任意の $\gamma \in \pi_1(\bar{C}-P,\ x)$ に対し n>0 があって $f_*^n(\gamma)\in G_n$ の「loop 部分」は自明であることは同値である。

補題
f は subhyperbolic とする。次のいずれかをみたせば φ が同相である radial r がある。

1.　ある領域 U があり、$f^{-1}(U)$ は U に含まれる d 個の領域からなる。
2.　単連結領域 U があり、ある m>0 にたいして $f^m(P)\cap U$ は空で、U の境界 は P を通らない単純閉曲線、 $f^{-1}(U)$ の連結成分はすべて単連結で U に含まれる。

また、次の例を得る。

例
$f(z)=(az^4-2az^2+c)/(z^2-1), c=(4a^2+1)/4a$ とする。|a| があるていど大きいと、$f^k(-c)\to\infty$ $(k\to\infty)$ であり、P⊂ $A_0(\infty)$ だが任意の radial r について、φ は同相でない。しかし、f^2 の radial r で φ が同相になるものはある。

[Ka3] A. Kameyama, Coding and tiling of Julia sets for subhyperbolic rational maps. Adv. Math. **200** (2006), 217 -- 244

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
亀山敦, *ジュリア集合のコーディングの空間*, 「力学系理論の最近の発展」,数理解析研究所講究録, 査読なし 1552 (2007), 97--106

〔学会発表〕（計１件）
亀山敦 ,「ジュリア集合のコーディング空間」, 日本数学会, 2010 年 3 月 24 日, 慶応大学

６．研究組織
(1)研究代表者
亀山　敦（KAMEYAMA　ATSUSHI）
岐阜大学工学部教授
研究者番号：00243189

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：