

平成 22 年 5 月 31 日現在

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540220

研究課題名（和文） 測度距離空間上の調和写像のディリクレ形式による解析

研究課題名（英文） Analysis on harmonic maps on metric measure spaces by Dirichlet forms

研究代表者

桑江 一洋 (KUWAE KAZUHIRO)

熊本大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：80243814

研究成果の概要（和文）：ディリクレ形式とマルコフ過程による解析の立場で、幾何学的な特異空間上の解析学や幾何学可能性を展開した、特に調和写像や（劣）調和関数の性質の導出を中心に研究を行なった。成果のいくつかは前回の基盤研究(C)16540201の研究成果を進展させるものである。副産物としてマルコフ過程論の研究領域においてもいくつかの研究成果を得ることに成功した。

研究成果の概要（英文）： In view of the theory of Markov processes and Dirichlet forms, we investigate geometric singular spaces. In particular, analysis on harmonic maps and (sub-)harmonic functions is the main aim of this research. Some of our results extend the previous results of the research supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 16540201 from Japan Society for the Promotion of Science. We also obtain some results on the theory of Markov processes as a byproduct.

交付決定額

（金額単位：円）

|        | 直接経費      | 間接経費      | 合計        |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| 2007年度 | 1,300,000 | 390,000   | 1,690,000 |
| 2008年度 | 1,100,000 | 330,000   | 1,430,000 |
| 2009年度 | 1,000,000 | 300,000   | 1,300,000 |
| 年度     |           |           |           |
| 年度     |           |           |           |
| 総計     | 3,400,000 | 1,020,000 | 4,420,000 |

研究分野：確率論

科研費の分科・細目：数学・大域解析

キーワード：アレキサンドロフ空間、グロモフ・ハウスドルフ収束、ディリクレ形式、加藤クラス、劣調和関数、変分収束、熱核、調和写像

## 1. 研究開始当初の背景

1960年代、J. Eells-J. H. Sampson に始まった滑らかなリーマン多様体間の調和写像の研究は微分幾何学の主要な研究対象の1つであり、現在も活発に研究されている。また英国 Warwick 大学 W. Kendall 氏により伊藤の確率

解析を用いた調和写像の研究が1990年代に提起され目覚ましい研究成果がなされてきた。

一方でリッチ曲率や断面曲率を一様に下から評価したリーマン多様体のある族のグロモフ・ハウスドルフ収束の極限の空間はもはや

一般には滑らかな多様体にならず、特異点と呼ばれる微分不可能な箇所が出現する。しかも場合によってはそのような特異点があるところ稠密になるような場合もあり得る。断面曲率が一樣に下から評価された場合のグロモフ・ハウスドルフ収束の極限の空間はアレキサンドロフ空間と呼ばれる幾何学的対象の一例になる。そのような空間の間の調和写像の研究はリーマン多様体の領域からの調和写像に関する Gromov-Scheon や Korevaar-Schoen 等の研究を起点としていくつかなされてきた。またリーマン多面体と呼ばれるリーマン多様体を単体とした単体的複体からそのような空間への調和写像の研究も Eells-Fuglede の著書や Fuglede の研究でなされてきた。

しかしながらこれらの研究は基本的には写像の定義域であるリーマン多様体の滑らかな微分構造に依存しており、定義域、値域がともに幾何学的に特異な空間の間の調和写像の研究とは言いがたい面がある。

研究代表者はディリクレ形式と対称マルコフ過程の理論の幾何学への応用というテーマに向けて、その都度対象を絞りながら種々の関連する問題を研究してきた：2001年のアレキサンドロフ空間上のディリクレ形式と熱核の構成の研究、2003年にはアレキサンドロフ空間からの写像のエネルギーの校正の研究とグロモフ・ハウスドルフ収束に準拠したディリクレ形式とそのスペクトル構造の収束の研究、2008年には非線形エネルギー汎関数の変分収束の研究などを発表してきた。またそれらの研究に触発され、きっかけとなって、マルコフ過程の確率解析の理論の研究が進展した。その成果は例えばマルコフ過程の細位相の連結性に基づく強最大値原理の確立という形で最近のアレキサンドロフ空間での位相的分裂定理の証明という形でフィードバックされた。

これらの実績を踏まえて幾何学的に特異な空間からの調和写像をマルコフ過程論の立場から研究を進展させようと考えたのが本研究の具体的な動機である。

## 2. 研究の目的

本研究の大きな目標は対称マルコフ過程に対応するディリクレ形式という解析的概念に基づいてアレキサンドロフ空間やグロモフ・ハウスドルフ収束による極限空間といった幾何学的な特異空間の間の調和写像の性質の解明を模索することである。また調和写像だけではなく調和関数や劣調和関数の解析的性質をディリクレ形式の視点から解明することを視野にいたした。

## 3. 研究の方法

マルコフ過程の一般論は1950年代後半から1960年代にかけて Hunt, Blumenthal-Gettoor 等によって整備された。福島正俊と Silverstein は1970年代においてディリクレ形式というポテンシャル論に根ざした解析的概念と対称マルコフ過程の対応に着眼して研究成果を生み出し、それは1980年代からフラクタル集合上のブラウン運動や無限次元空間上の確率過程といった伊藤の確率微分方程式では扱えない対象に目覚ましい応用がなされてきた。そのような背景を踏まえてマルコフ過程やマルコフ連鎖という確率論的な概念に立脚して幾何学的な特異空間上の解析と幾何学を行なうのが本研究の主たる特色である。具体的には年に一回「確率論と幾何学」の研究会を2007年度に熊本大学、2008年度にお茶の水大学、2009年度に京都大学にて開催し、関係する研究者と情報交換ならびに研究発表を通して問題解決の糸口となるアイデアを模索していった。逆にそのような研究成果を動機としてマルコフ過程論の研究を促進するのも副次的な特徴である。

## 4. 研究成果

多岐にわたる成果の中からいくつかを挙げて行く。

(1) 直径が  $1/2$  未満の CAT(1)空間上の Jensen の不等式の成立を示した。ここで CAT(k)-空間とは測地空間で与えられた測地三角形と同じ辺の長さをもつ定曲率  $k$  の空間内の測地三角形と比較してやせていることで定義される幾何学的対象を指す。このような空間は M.Gromov の1987年の双曲群に関する論文で3人の著名な微分幾何学者 E.Cartan, A.D.Alexandrov, V.A.Topogonov の頭文字を並べて名称が提起された：

**定理**  $(Y, d)$  を直径が  $1/2$  未満の CAT(1)空間とする  $Y$  上の確率測度  $\mu$  の重心  $b(\mu)$  と上半連続な  $Y$  上の凸関数  $f$  に対して

$$f(b(\mu)) \leq \int_Y f(x) \mu(dx)$$

という Jensen の不等式が成立する。◇

CAT(0)空間上において Jensen の不等式が成立することは Eells-Fuglede のリーマン多面体からの調和写像に関する著書において初めて明示された。これは CAT 空間上に値をとる調和写像と凸関数との合成が劣調和関数になることを示す上で重要な不等式であり、これを使うことによって次の Liouville 型定理を導出できる：

**定理** 保存的なマルコフ連鎖が定義された空間から直径が  $1/2$  未満の CAT(1)空間に値をとるマルコフ連鎖に基づいた調和写像において、マルコフ連鎖による有界な調和関数が定数に限れば、有界な調和写像も定値写像に限る。◇

(2) “リッチ曲率が非負かつ次元が一樣に

上に有界”に相当する条件を許容する重みを伴ったアレキサンドロフ空間上の位相的分裂定理が成立することを示した。ここで“リッチ曲率が一樣に  $K$  かつ次元が一樣  $N$ ”を満たす空間とは測度縮小性 (MCP( $K, N$ )) と呼ばれる条件で最適輸送問題 (モンジュ・カントロヴィッチ問題) に由来する曲率次元条件  $CD(K, N)$  と呼ばれるものよりは弱い概念である。MCP( $K, N$ ) と  $CD(K, N)$  は、次元が  $N$  の完備滑らかなリーマン多様体の場合にはリッチ曲率  $K$  と同値であることが知られている。また位相的分裂定理とは空間が直線を包含すればそれは 1 つ次元の低い空間と直線との直積の形と位相同型という主張である。またそれに付随してそのような空間上のラプラシアンと比較定理を非常に一般的な設定で得た。副産物として熱核の比較定理やディリクレ条件下のラプラシアンの固有値の比較定理、ブラウン運動の非確定などがアレキサンドロフ空間の場合に得られる。さらにアレキサンドロフ空間の特異生が弱いときには同じ条件下で等調的分裂定理が成立することを示した。ここで特異生が弱いとは特異集合が閉集合でその外側では Bakry-Emery のリッチテンソルが非負のリーマン多様体になるということである。

(3)  $n$  次元アレキサンドロフ空間において曲率下に有界の概念から  $n$  次元ハウスドルフ測度が測度縮小性 (MCP) 条件を満たすことを厳密に明示した。この事実は早くから正しいものとして認識されていくつかの文献で述べられていたが、その証明が完全でなかったことからきちんとした証明を明示した。

(4) マルコフ過程のフェラー性や強フェラー性が乗法的汎関数で変換した (必ずしもマルコフ的でない) 半群に対して保存されるかどうかについての K.L.Chung の結果を改良する結果を得た。

(5) 対称マルコフ過程に対応するディリクレ形式の摂動によって得られた確率論的表示による半群の強連続性について以前の研究成果を改良する結果を得た。

##### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 20 件)

S. Ishiwata, *A central limit theorem on modified graphs of nilpotent covering graphs*, Spectral analysis in geometry and number theory, 59-72, Contemp. Math., **484**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009. 査読有

K. Kuwada, *Characterization of maximal Markovian couplings for diffusion processes*, Electronic Journal of Probability **14** (2009) 633-662 査読有

K. Kuwada, *Characterization of maximal*

*Markovian couplings for diffusion processes*, Electronic Journal of Probability **14** (2009) 633-662 査読有  
K. Kuwae, *Jensen's inequality over CAT( $k$ )-space with small diameter*, Theta Series in Advanced Mathematics **14** (2009) 173-182 査読有

Z.-Q. Chen, K. Kuwae, *On doubly Feller property*, **46** (2009) 901-930 査読有

Z.-Q. Chen, P.J. Fitzsimmons, K. Kuwae, T.-S. Zhang, *On general perturbations of symmetric Markov processes*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **92** (2009) 363-374 査読有

K. Kuwada, *Laplace approximation for stochastic line integrals*, Probability Theory and Related Fields **144** (2009) 1-51 査読有

T. Shioya, *Geometric analysis on Alexandrov spaces (Japanese)*, Sugaku **61** (2009) 1-20 査読有

K. Kuwae, K. Th. Sturm, *On a Livouille type theorem for harmonic maps to convex spaces via Markov chains*, RIMS Kokyuroku Bessatsu **B 6** (2008) 177-191 査読有

Z.-Q. Chen, P.J. Fitzsimmons, K. Kuwae, T.-S. Zhang, *Stochastic calculus for symmetric Markov processes*, Annals of Probability **30** (2008) 931-970 査読有

Z.-Q. Chen, P.J. Fitzsimmons, K. Kuwae, T.-S. Zhang, *Perturbation of symmetric Markov processes*, Probability Theory and Related Fields **140** (2008) 239-275 査読有

K. Kuwae, *Maximum principles for subharmonic functions via local semi-Dirichlet forms*, Canadian Journal of Mathematics **30** (2008) 931-970 査読有

K. Kuwae, T. Shioya, *Variational convergence over metric spaces*, Transactions of American Mathematical Society **360** (2008) 35-75 査読有

S. Ishiwata, *Gradient estimate of the heat kernel on modified graphs*, Potential Analysis **27** (2007) 335-351 査読有

K. Kuwada, *On uniqueness of maximal coupling for diffusion processes with a reflection*, Journal of Theoretical Probability **20** (2007) 937-975 査読有

K. Kuwada, K.-Th. Sturm, *A counter example for the optimality of Kendall-Cranston coupling*, Electronic Communications in Probability **12** (2007) 66-72 査読有

S. Ishiwata, *Discrete version of Dungey's proof for the gradient heat kernel estimate on coverings*, Annales Mathématiques Blaise Pascal **14** (2007) 93-102 査読有

K. Kuwae, M. Takahashi, *Kato class measures of symmetric Markov processes under heat kernel estimates*, Journal of Functional Analysis **250** (2007) 86-113 査読有

塩谷 隆, 3次元多様体の崩壊, 解決ポアンカレ予想日本評論社 数学セミナー増刊 2007 (2007) 54-68 査読無

塩谷 隆, 曲がった空間を見る---幾何学入門からポアンカレ予想まで, 日本評論社 数学のたのしみ 2007 春・冬, (2007) 118-132 査読無

[学会発表](計 50 件)

石渡 聡, ボトルネック型熱核評価を持つ多様体の幾何学的特徴付け, 日本数学会年会一般講演, 2010年3月25日, 慶応大学

桑江 一洋,  $L^p$ -independence of spectral bounds of Feynman-Kac semigroups by continuous additive functionals, 日本数学会年会一般講演, 2010年3月24日, 慶応大学

桑江 一洋, On subharmonicity for symmetric Markov processes, 日本数学会年会一般講演, 2010年3月24日, 慶応大学

石渡 聡, Manifolds with a Bottleneck Type Heat Kernel Estimate, Workshop on Analysis and Geometry on Metric Measure Spaces, 2010年3月20日, 香港中文大学

塩谷 隆, Geometric Analysis on Alexandrov spaces, 談話会, 2010年3月17日, Nortre Dame 大学(米国)

塩谷 隆, A splitting theorem for weighted Alexandrov spaces, 第5回日中友好幾何学研究集会, 2010年1月31日, 沖縄科学技術研究基盤整備機構

桑田 和正, Duality on gradient estimates and Wasserstein controls, 確率論と幾何学, 2010年1月8日, 京都大学

石渡 聡, ボトルネック型熱核評価を持つ多様体の幾何学的特徴付け, 確率論と幾何学, 2010年1月8日, 京都大学

石渡 聡, ボトルネック型熱核評価を持つ多様体の幾何学的特徴付け, 微分幾何セミナー, 2009年12月22日, 筑波大学

塩谷 隆, Geometric analysis on Alexandrov space, 談話会, 2009年12月2日, 京都大学

桑江 一洋, 対称マルコフ過程論とその応用, 日本数学会秋期総合分化会特別講演, 2009年9月24日, 大阪大学

石渡 聡, Smallness of the first Neumann eigenvalues under a bottleneck heat kernel estimate, 幾何解析セミナー, 2009年9月15日, Bielefeld 大学(ドイツ)

桑江 一洋,  $L^p$ -independence of spectral bounds of Feynman-Kac semigroups by continuous additive functionals, The Third International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications, 2009年7月15日, 北京理工大学(中華人民共和国)

桑江 一洋, On subharmonicity of symmetric Markov processes, Stochastic Analysis of Jump Processes and Related Topics, 2009年7月10日, 京都大学

石渡 聡, The gradient heat kernel estimate on gluings, 幾何解析セミナー, 2009年5月7日, Bielefeld 大学(ドイツ)

桑江 一洋, 対称マルコフ過程の劣調和性について, 九州確率論セミナー, 2009年4月24日, 九州大学

塩谷 隆, A splitting theorem for weighted Alexandrov spaces, リーマン幾何と幾何解析, 2009年2月21日, 筑波大学

石渡 聡, Heat kernel on gluings, 数理情報科学セミナー, 2009年1月26日, 広島大学

桑江 一洋, On general perturbations of symmetric Markov processes, 確率論シンポジウム, 2008年12月19日, 東京工業大学

桑江 一洋, On doubly Feller property, 確率論シンポジウム, 2008年12月19日, 東京工業大学

21 石渡 聡, Heat kernel on gluings, 微分トポロジーセミナー, 2008年12月9日, 京都大学

22 石渡 聡, Heat kernel on gluings, 松江セミナー, 2008年11月5日, 島根大学

23 塩谷 隆, A splitting theorem for weighted Alexandrov spaces, 幾何セミナー, 2008年10月7日, 東北大学

24 大津 幸男, Statistical mechanics of Bose ideal gas on Riemannian manifolds, 確率論と幾何学, 2008年9月15日, お茶の水女子大学

25 石渡 聡, Gradient heat kernel estimate on gluings, Stochastic Analysis and Applications 日独共同研究, 2008年9月12日, 九州大学西新プラザ

26 桑江 一洋, On general perturbations of symmetric Markov processes, Stochastic Analysis and Applications 日独共同研究, 2008年9月11日, 九州大学西新プラザ

27 桑田 和正, Characterization of maximal Markovian couplings for diffusion

processes, Stochastic Analysis and Applications 日独共同研究, 2008年9月8日, 九州大学西新プラザ

28 大津 幸男, Statistical mechanics of 1-particle ideal gas and deformation of Alexandrov spaces, Probabilistic Approach to Geometry, 2008年8月1日, 京都大学百周年記念館

29 桑江 一洋, Characterization of maximal Markovian couplings for diffusion processes, Probabilistic Approach to Geometry, 2008年7月31日, 京都大学百周年記念館

30 塩谷 隆, Geometric analysis on Alexandrov spaces, Probabilistic Approach to Geometry, 2008年7月31日, 京都大学百周年記念館

31 桑江 一洋, On discrete harmonic maps into CAT(k)-spaces via Markov chains, Probabilistic Approach to Geometry, 2008年7月30日, 京都大学百周年記念館

32 桑江 一洋, On double Feller property, The Second International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications, 2008年5月28日, ソウル大学

33 石渡 聡, Heat kernel on gluings, リーマン幾何と幾何解析, 2008年2月18日, 筑波大学

34 桑江 一洋, On double Feller property, マルコフ過程とディリクレ形式に関する話題, 2008年2月17日, 熊本大学

35 石渡 聡, Heat kernel on gluings, 福岡大学微分幾何学研究会, 2008年1月12日, 福岡大学セミナーハウス

36 大津 幸男, ランダムネットによる1粒子理想気体の統計力学とその変形, 福岡大学微分幾何学研究会, 2008年1月11日, 福岡大学セミナーハウス

37 桑江 一洋, On a Liouville type theorem for harmonic maps to convex spaces via Markov chains, 多様体上の微分方程式, 2007年12月10日, いしかわシティカレッジ

38 石渡 聡, 熱核の gradient 評価と Riesz 変換の  $L^p$  有界性, バナッハ環セミナー, 2007年11月21日, 筑波大学

39 石渡 聡, ベキ零離散群上のランダム・ウォークの漸近挙動について, 仙台放物型・楕円型方程式研究集会, 2007年11月17日, 東北大学, 2007年11月21日, 筑波大学

40 石渡 聡, Behavior of the Heat kernel on gluings, 談話会, 2007年11月8日, 東京理科大学

41 石渡 聡, Gradient heat kernel estimate on gluings, 微分幾何学火曜セミナー, 2007年10月23日, 筑波大学

42 大津 幸男, ランダムネットの統計力学と変形について, 確率論と幾何学, 2007年10

月19日, 熊本大学

43 石渡 聡, Gradient heat kernel estimate on gluings, 確率論と幾何学, 2007年10月19日, 熊本大学

44 桑江 一洋, Laplacian comparison for Alexandrov spaces, Dirichlet forms, stochastic analysis and interacting systems, 日独共同研究, 2007年9月17日, ベルリン工科大学

45 桑江 一洋, On a Liouville type theorem for harmonic maps to convex spaces via Markov chains, Potential Theory and Stochastics 2007年9月7日, Albac, Romania

46 石渡 聡, Gradient heat kernel estimate on gluings, 幾何学阿蘇研究集会, 2007年9月3日, 休暇村阿蘇

47 石渡 聡, Random walks on nilpotent covering graphs, International Conference "Spectral Analysis in Geometry and Number Theory" 2007年8月9日, 名古屋大学

48 桑江 一洋, On the strong Feller property of Feynman-Kac semigroup for CAF of zero energy under heat kernel estimates, 東北確率論セミナー, 2007年7月19日, 東北大学

49 石渡 聡, Gradient heat kernel estimate on gluings, 岡山大学数学談話会, 2007年7月4日, 岡山大学

50 石渡 聡, Connectivity on discrete nilpotent groups, Analysis on Graphs and Fractals, 2007年5月31日, Cardiff 大学(英国)

〔図書〕(計1件)

塩谷 隆, サイエンス社

「重点解説基礎微分幾何」(2009) 204頁

〔その他〕

集中講義

1. 「Dirichlet 形式とマルコフ過程(劣調和性と強最大値原理)」埼玉大学・理工学研究科(2007年11月)

2. 「凸空間に値をとる調和写像」京都大学情報学研究科(2008年1月)

6. 研究組織

(1)研究代表者

桑江 一洋 (KUWAE KAZUHIRO)

熊本大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号: 80243814

(2)研究分担者

(3)連携研究者

塩谷 隆 (SHIOYA TAKASHI)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号: 90235507

(H19: 研究分担者)

大津 幸男 (OTSU YUKIO)  
九州大学・数理学研究院・准教授  
研究者番号：80233170  
(H19：研究分担者)

町頭 義朗 (MACHIGASHIRA YOSHIROH)  
大阪教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号：00253584  
(H19：研究分担者)

桑田 和正 (KUWADA KAZUMASA)  
お茶の水女子大学・理学部・講師  
研究者番号：30432032  
(H19：研究分担者)

石渡 聡 (ISHIWATA SATOSHI)  
筑波大学・数理物質科学研究科・助教  
研究者番号：70375393  
(H19：研究分担者)