

平成22年 5月28日現在

研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2007～2009
 課題番号：19540222
 研究課題名（和文） リュービルシステムに現れる集中現象と渦点の衝突に関する研究
 研究課題名（英文） Study on collision phenomena of blow-up points appear in Liouville systems and those of vortices
 研究代表者
 大塚 浩史 (OHTSUKA HIROSHI)
 宮崎大学・工学部・准教授
 研究者番号：20342470

研究成果の概要（和文）：リュービルシステムの代表例である、混合渦点系の平均場方程式の解析を行い、集中現象の衝突の分類に関する「質量等式」を得た。また、リュービルシステムを導く汎関数など、パレー-スモール条件を仮定できないある種の汎関数について、臨界点のモース指数を評価する手法を確立した。更に、単独リュービルシステム（リュービル型方程式）に関連する汎関数について、「漸近的非退化性」と呼ばれる臨界点の周りの構造に関する性質を示した。

研究成果の概要（英文）：I studied the mean field equation of vortices with mixed intensities, which is one important example of Liouville systems and got “a mass identity” as a basic fact to classify the collisions of the blow-up points. In addition, I established technique to estimate the Morse index of the critical point about the certain functional that could not assume the Palais-Smale condition including the functionals that lead Liouville systems. Furthermore, I showed a property about the structure around the critical point called “the asymptotic non-degeneracy” about the functionals relating to the scalar Liouville systems (i. e., the Liouville type equations).

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：変分法と非線形偏微分方程式論

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数方程式論、関数解析学、応用数学、数理物理、Liouville system、変分法、渦点、点渦

1. 研究開始当初の背景

(1) 対象とした方程式系「リュービルシステム」について：

非線形項が指数関数で表される2次元の半線形楕円型方程式は、リュービル型方程式

と呼ばれる。この方程式は、曲面の共形変形、自己双対ゲージ理論、走化性方程式の定常問題など、多くの由来を持つことが知られているが、近年完全流体の渦点系との関連が注目されている。

2次元完全流体上の定常状態は、ラプラスアンに関する非線形固有値問題で記述され、その解が流れ関数（渦度場から定まる速度ポテンシャル）となる。このとき、非線形性（流れ関数と渦度場の関数関係）を定める関数は適当な滑らかさを持つ任意の関数でよいが、Joyce-Montgomery ('73 J. Plasma Phys.)、Pointin-Lundgren ('76 Phys. Fluids)により導かれた、双曲線正弦関数に類した非線形項を持つ場合が、特に注目されている。

彼らは、「渦点系」、すなわち、流体の渦度場が、ディラック測度の有限線形和であるモデルについて、その平衡状態の「平均場極限」、すなわち適切な条件の下で渦点の数を無限個にした極限を考察し、そこに現れる連続な定常渦度場（渦点系の平均場）が満たすべき方程式「平均場方程式」を得た。これを流れ関数について記述すると、双曲線正弦関数に類した非線形項を持つ非線形固有値問題になる。

彼らが出発点とした渦点系は、絶対値は等しいが符号が異なる2種類の強さをもつ渦点で、一定の割合で混在しているものである。得られた平均場方程式は、正負の渦点の混合比から定まる二つのパラメータをもち、それらを係数とした指数関数と指数関数の逆数の差を非線形項として持つ。必然的に非線形項が非定符号となるが、非線形項を正値部分と負値部分に分け、各々に対応する解の「成分」を考察すると、平均場方程式の解はこれら正負の成分の重ね合わせになり、それぞれの成分は、それぞれに応じたリュービル型方程式を満たす。

すなわち、異符号渦点系の平均場方程式の解は、非線形項の正負に応じた二つの成分に分解したとき、リュービル方程式を連立方程式化した「リュービルシステム」を満たすことになる。

なお、平均場を考察する出発点となる渦点系として、単一符号の強さの渦点のみが偏在した場合を考えると、平均場方程式はリュービル型方程式に帰着される。また、リュービルシステムは、連立方程式を定める係数行列に応じて異なるものが得られるが、非可換 Chern-Simons ゲージ理論に現れる $SU(N)$ 戸田システムなどが、例としてよく知られる。

リュービル型方程式の自然な拡張であり、多くの重要な例を包含する「リュービルシステム」は、今後も継続して研究すべき対象と思われる。

(2) 既存の結果と予想されること、問題点について：

微分方程式の解の先験的評価は、方程式の解空間の構造を調べる第一歩となる重要な事実であるが、リュービル型方程式は、方程式が含むパラメータが「 8π の自然数倍」という特定の値以外では先験的評価が存在す

ることが知られている ('90 Nagasaki-Suzuki, Asymptotic Anal., '94 Li-Shafir Indiana Univ. Math. J.)。一方、異符号渦点系の平均場方程式は、前提とした渦点系の正負の渦点の混合比から定まる二つのパラメータの内、少なくとも一つが 8π の自然数倍以外の場合に、解の先験的評価があることが自然に予想されるが、平均場方程式における解の正負の成分は、満たすべきリュービル型方程式の係数関数を通して互いに関連していることから、解析する上での困難がある。具体的には、正の渦度場の集中現象と負の渦度場の集中現象が同時に同じ点に生ずる「集中現象の衝突」が発生する場合であり、その詳細が把握困難である。

鈴木氏との研究 ('06 Banach Center Publ. to appear) では、パラメータが共に 24π 以下の場合に先の予想が証明されたが、これは、この範囲に関わる「集中現象の衝突」のみ分類できていることに由来する。なお、類似のリュービルシステムである $SU(N)$ 戸田システムにおいても同様の「集中現象の衝突」が起こることが知られている。この場合も鈴木氏との共同研究 ('06 J. Differ. Equ., to appear.) で取り組んだが、異符号渦点系の平均場方程式の場合同様、部分的結論しか得られていない。なお、Jost-Lin-Wang ('06 CPAM) は、 $SU(3)$ 戸田方程式系において同様の問題点を指摘し、完全と思える結論を主張しているが、その証明には正当化することが困難に思える箇所もある。このように、一般に「リュービルシステム」の「集中現象の衝突」の解析は、今後も継続して研究すべき重要な課題であると思われるが、新たな視点が望まれている状況であることも感じる。

(3) 渦点系の衝突：

一方、衝突という現象は、古くから天体力学や渦点系の解析では考察されている。特に、「正則化」と呼ばれる座標変換により、衝突という特異性のある現象を、滑らかな力学系として捕らえなおすことが行われており、このような視点は平均場方程式の解析には見られない。平均場方程式はその出自からも渦点系と深く関連があり、解の特異極限に現れる渦度が集中する点の配置が、渦点系の定常配置から定まることなども知られる。リュービルシステムの集中現象の研究の一環として、渦点系の衝突を考察することも意義深い。

2. 研究の目的

本研究は、リュービルシステム (Liouville system) とよばれる非線形楕円型連立方程式系に現れる集中現象、特に、連立方程式の中の個々の方程式の解が、同時に共通の一点の周りに集中現象をおこす「集中現象の衝突」の分類を目標とする。この分類は、リュービルシステムの解の存在証明や、解の大域

的な分岐構造を把握することなどに必要な基本的な情報であるが、未解明な部分も多い。

そこで、これまで調べられていない種類のリュービルシステムにおける問題点の整理からはじめ、関連すると思われる渦点の衝突の解析や数値的なシミュレーションなど、幅広い視点でこの現象に取り組み新事実を得ることが本研究の目的である。

3. 研究の方法

専門である変分法、偏微分方程式としての議論は、研究分担者である仙葉氏、辻川氏などを含め、適宜国内外の研究者と連絡を取りながら研究を進める。また、学会発表や研究集会における発表などの機会を積極的に活用し、問題点の明確化に努める。

渦点の衝突に関しては、研究分担者の関口氏の協力を求める。氏は天体力学を専門としており、質点の衝突の正則化について詳しい知識をもつ。

必要に応じて、辻川氏、関口氏の協力のもと計算機シミュレーションに取り組む。

具体的な以下のような内容に注意しながら、研究を進める。

(1) 既存の結果の一般化: これまで主に異符号渦点系の平均場方程式と SU(3) 戸田システムに対応するリュービルシステムを扱ってきたが、得られている結果を一般のリュービルシステムに拡張し、問題点の整理を行う。異符号渦点系の平均場方程式と SU(3) 戸田システムの間にも本質的な違いが見られるが、その他の可能性を明らかにする。

(2) 既存の結果の検証の継続: 本研究分野は、先に挙げた Jost-Lin-Wang の結果など、得られている結果が錯綜しているように感じられる。これを明確にする。

(3) 集中現象の衝突の可能性の確認: 既に異符号渦点系の平均場方程式と SU(3) 戸田システムについては「集中現象の衝突」が起こる可能性があるパラメータの組み合わせなどの情報を得ている。これが渦点の衝突が起こる可能性のあるものなのか、解析的、数値的な検証を試みる。

(4) 渦点の衝突の正則化の拡張: 先に述べた渦点の正則化という視点は、これまでの平均場方程式の研究にはない。そこで、まず完全流体の Euler 方程式における対応する概念を明らかにする。また、構造上類似する走化性方程式についても、同様の考察を行う。

4. 研究成果

(1) 主な成果とその位置づけ

①混合渦点系の平均場方程式の研究:

T. Ricciardi 氏 (Napoli 大学)、鈴木貴氏 (大阪大学) とともに、リュービルシステムの重要な例である混合渦点系の平均場方程式の、考え得る最も拡張されたもの (強度の値が非

加算無限種あるような混合渦点系) の爆発解析 (非有界な解の列の極限の分類) を行った。この方程式 (系) は、関数の 1 パラメータ族が「解」になることに由来する困難さがあり、解の収束極限をできる限り弱い位相で考える新しい解析を行った。その結果、「質量等式」と呼ばれる、この方程式に発生しうる「集中現象の衝突」を分類するための基礎的な成果を得た。これは、2 種の混合渦点系の場合に知られているものの、自然な拡張になっている。

このような方程式 (系) を考察する例は国内外にも見られない。また、この方程式は、混合渦点系として考えられる全ての場合を含むと思われ、起こりえる可能性の全てを包摂し得る特別な例と思われる。現在は部分的な結論しか得られていないが、今後、より具体的な事実が得られている個別の例を統合していくことで、種々の平均場方程式に普遍的な構造を見るときの対象として、重要なものと思われる。

②パレー-スモール条件を仮定できない汎関数の臨界点について:

リュービルシステムを導く汎関数は、臨界点の構造などの計算を保証する、ある種のコンパクト性であるパレー-スモール (Palais-Smale) 条件が満たされることが明らかでない。そこで、パレー-スモール条件を用いない臨界点のモース指数を評価する手法を抽象的な形で整備した。

これは、リュービルシステムを導く汎関数の性質を詳しく調べることを目的に始めたものだが、適当な仮定の下で一般論に昇華できた。パレー-スモール条件を課す場合は、既に古典として知られる Hofer による結果 ('86 Proc. AMS) 等があるが、以降の本質的な進展はあまりないと思われる。また、汎関数のパラメータに関する単調性に注目した Struwe の方法というコンパクト性を得る方法も広く知られ、変分問題の解の存在定理に応用されてきたが、これが臨界点の構造を知ることにも応用できることを見いだしたことも、これまでに見られないと思われる。

③ゲルファント問題の漸近的非退化性:

(単独) リュービル型方程式で記述される非線形固有値問題であるゲルファント問題において、解の爆発列 (最大値が発散する列) の極限において、爆発点 (最大値が発散する点) が有限個の点になり、その位置は、渦点系のハミルトニアン (Nagasaki-Suzuki, 1990, *Asympt. Anal.*)。これに対し、Gladioli-Grossi (2004, *Commun. PDE*) は、特に 1 点爆発する解の列を考察し、爆発点がハミルトニアン (Nagasaki-Suzuki, 1990, *Asympt. Anal.*) の非退化臨界点である場合、十分爆発に近づいた解が非退化 (線形化問題が非自明解を持たない) であることを示した。これを、

M. Grossi 氏 (ローマ大学)、鈴木貴氏 (大阪大学) との共同研究により、一般の多点爆発する解の列に対して拡張した。

この事実は、定常渦点系の周辺にある渦点系の挙動が、ゲルファント問題を与える汎関数の等高面により記述される可能性を示唆する重要な事実であり、衝突する渦点を、渦度場を用いて考察する際の指針も与えていると思われる。

(2) 今後の展望

(1) ①の結果から、最も重要と思われるリュービルシステムである、多種混合系平均場方程式においてさえ、その集中現象の衝突が予想以上に複雑であることが判明した。この為、既に、幅広い一般のリュービルシステムから渦点系の平均場方程式と呼ばれるグループを対象を絞り込み、当初の想定より、より深い解析的結果 (漸近的非退化性) を確立しながら研究を進めている。現在、平均場方程式の類似問題であるゲルファント問題で大きな成果 (多点爆発解の漸近的非退化性、上記 (1) ③) が得られ、展望が開けた。

研究対象としてのリュービルシステムは、その解析の難しさも明らかになりつつあるが、新たな解析手法も見いだされるなど、活発に研究が進んでいる。今後も取り組み続けるべき重要な対象であると思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

① Hiroshi Ohtsuka, Toward asymptotic non-degeneracy results for the mean field equations on surfaces, 数理解析研究所講究録 1628 「変分問題とその周辺」, 査読無, 1628, 1-21, 2009

② Hiroshi Ohtsuka, Takashi Suzuki, Local property of the mountain-pass critical point and the mean field equation, Differential Integral Equations, 査読有, 21, 421-432, 2008

③ Hiroshi Ohtsuka, Takasi Senba, Takashi Suzuki, Blowup in infinite time in the simplified system of chemotaxis, Adv. Math. Sci. Appl., 査読有, 17, 445-472, 2007

[学会発表] (計10件)

① 大塚浩史, 点渦系とその平均場について, 日本数学会2010年度年会函数方程式論分科会 (特別講演), 2010年3月25日, 慶応大学 (神奈川県)

② Hiroshi Ohtsuka, Blow-up analysis for an

elliptic equation describing stationary vortex flows with variable intensities in 2D-turbulence, The 7th East Asia PDE Conference, 2009年12月17日, City University of Hong Kong (Hong Kong, China)

③ Hiroshi Ohtsuka, Local property of the mountain-pass critical point and the mean field equation, The 5th East China Partial Differential Equations Conference, 2008年7月8日, Nanjin University (Nanjin, China)

④ 大塚浩史, 2次元乱流に関する平均場方程式の解集合について, 第117回日本数学会九州支部例会 (特別講演), 2007年10月7日, 宮崎大学 (宮崎県)

⑤ 大塚浩史, The structure of the solution set for a mean field equation, 第32回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 2007年8月26日, 北海道大学 (北海道)

[その他]

ホームページ等

<http://www.miyazaki-u.ac.jp/~ohtsuka/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大塚 浩史 (OHTSUKA HIROSHI)
宮崎大学・工学部・准教授
研究者番号: 20342470

(2) 研究分担者

辻川 亨 (TSUJIKAWA TOHRU)
宮崎大学・工学部・教授
研究者番号: 10258288

関口 昌由 (SEKIGUCHI MASAYOSHI)
木更津工業高等専門学校・基礎学系・教授
研究者番号: 30236088
(H20→H21: 連携研究者)

仙葉 隆 (SENBA TAKASI)
九州工業大学・工学研究院・教授
研究者番号: 30196985
(H20: 連携研究者)

(3) 連携研究者

(4) 研究協力者

鈴木 貴 (SUZUKI TAKASHI)
大阪大学大学院・基礎工学研究科・教授

Ricciardi, Tonia
ナポリ大学・数学科・准教授

Grossi, Massimo
ローマ大学・数学科・准教授