様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　５月１１日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2007～2008
課題番号：19560057
研究課題名（和文）　非均質固体の大変形解析のための節点ベース有限要素法の開発

研究課題名（英文）NODE-BASED FINITE ELEMENT METHOD FOR LARGE DEFORMATION ANALYSIS OF HETEROGENEOUS SOLIDS

研究代表者
寺田　賢二郎（TERADA KENJIRO）
東北大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：40282678

研究成果の概要：本研究では，非均質固体の大変形問題を対象に，メッシュの「つぶれ」や「ゆがみ」を常に修正しながら解析が可能な節点ベース有限要素法を開発した．具体的には，通常の有限要素法は，節点には変位値が付与され応力やひずみは要素（あるいは積分点）の物理量として離散化が行われるが，すべての物理量を節点で評価する節点ベースの有限要素法を採用して，任意の大変形挙動が解析可能な有限要素法へと拡張した．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	2,600,000	780,000	3,380,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：工学
科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎・工学基礎
キーワード：節点積分有限要素法，大変形問題，非均質材料，マルチスケール，亀裂進展問題

１．研究開始当初の背景

既存の“マクロ”CAE ツールを“ミクロ” 構造の解析に転用しようとすると，CAE が元々非均質性が顕著な材料微視構造の解析を想定していないので，物理現象のモデル化は同じであっても力学挙動が異なる構成材料が共存するというだけで，解決できない問題が多く残されていることに気づく．例えば，ゴムのミクロ構造を，純ゴムとカーボンフィラーの 2 相構造とみなしてモデル化し，有限要素解析を行う場合，残念ながら次の問いかけに対して肯定的な答えを提示できないのが現状である．

(a) 複雑な粒子分散の幾何性状を有する所望の数値モデル（ここでは有限要素メッシュ）を正しく生成して解析できるのか？
(b) 数百パーセントまで変形する純ゴムとほとんど変形しないフィラーからなる複合構造の力学挙動を精度よく，安定的に解けるのか？
(c) 1～10 万倍も弾性率の異なるこの 2 相複合構造の有限要素解析が可能か？
(d) ミクロ構造の解析に際して，純ゴム，フィラーそれぞれの材料モデルと材

料パラメータ，およびそれら界面の強度を適切に設定できるのか？

すなわち，マルチスケール CAE の枠組みでは，ミクロ構造の数値解析においても定量的な評価の前提となる一定の精度保証が求められるとともに，正確なミクロ構造内部の形状モデリング，計算の効率化，そして（何らかの影響で解析が続行不可能になることがないような）ロバスト性が要求される．

２．研究の目的

本研究では，メッシュの「つぶれ」や「ゆがみ」を常に修正しながら解析が可能な節点積分有限要素法（NI-FEM）を開発する．具体的には，通常の有限要素法が，節点には変位値が付与され応力やひずみは要素（あるいは積分点）の物理量として離散化が行われるのに対して，すべての物理量を節点で評価する節点ベースの有限要素法を採用して，任意の大変形挙動が解析可能な有限要素法へと拡張する．この手法は，大変形に伴ってメッシュが大きくゆがむ場合には，節点位置を再配置して，あるいは必要に応じて節点を増やして（あるいは減らして）メッシュを再生成しながら解析を進めるという，有限要素法でありながら粒子法的な特徴を持った新しい解析手法である．

３．研究の方法

(1) 非均質線形弾性体からなる複合材料のミクロ構造の解析への対応
- ① 線形三角形要素を用いた 2 次元線形弾性問題の有限要素解析コードの入出力機能の整備【LESOLID.ver.1】[既存]
- ② LESOLID.ver.1 の節点ベース有限要素法への改変　【LESOLID.ver.2】
- ③ LESOLID.ver.2 の非均質体（材料が 2 個以上ある場合）への対応と検証【LESOLID.ver.3】

(2) 非均質超弾性体からなる複合材料のミクロ構造の解析への対応
- ① 2 次元線形弾性体の節点ベース有限要素解析コーLESOLID.ver.3 を超弾性体の有限変形問題に対応させる（ただし，構成モデルはNeo-Hookeanモデルのみ）【HESOLID.ver.1】
- ② HESOLID.ver.1 にMooney-Rivlinモデル，Ogden モデル, Arrude-Boyce モデルなど，ゴム材料の代表的な構成モデルに対応させる　【HESOLID.ver.2】

(3) メッシュ再生成副プログラムの導入によるリメッシング機能の付加
- ① 2 次元超弾性体の有限変形問題に対する節点ベース有限要素解析コード HESOLID.ver.2 に，初期メッシュおよび解析の途中で既存の節点群からメッシュを自動生成するプログラムを組み入れる（ボロノイ多角形と三角形メッシュの生成）【HENBFEM.ver.1】
- ② HENBFEM.ver.1 に新たな節点を付加，あるいは不要な節点を除外する節点再配置アルゴリズムを導入【HENBFEM.ver.2】

４．研究成果

(1) 概要

開発した解析手法（節点積分有限要素法：NI-FEM）は,非均質材料の大変形解析を目標に据え，初年度は，その下準備として，主に線形問題に限定して節点積分有限要素法の定式化・プログラムへの実装，ならびに近似特性の調査・検証を行った．特に，節点積分有限要素法の近似特性や変形性能に関する基礎的な検討に際しては，低次の有限要素近似において重要な曲げ変形に伴うせん断ロッキングと非圧縮性に伴う体積ロッキングの問題や，円孔穴あき板における応力集中の問題，異種材料界面を含む複合構造の問題を設定し，自由度数や近似に利用する有限要素のゆがみに対する影響などを調査し，手法としての性能を確認した．また，節点近似に利用する有限要素の数の違いを考慮した数値解析を行い，その影響についても考察した．また，平行して 2 次元線形弾性体の節点ベース有限要素解析コードを超弾性体の有限変形問題に対応させ，さらにそれを 3 次元問題にも対応させた．これらの成果により，提案する解析手法が最終的に完備すべき機能について，そのベースとなる計算プログラムの開発と性能検証を完了することができた．

次年度（最終年度）には，開発の最終目標としていた「メッシュ再生成副プログラムの導入による解析前および最中のリメッシング機能の付加」に関して，2 次元超弾性体の有限変形問題に対する節点ベース有限要素解析コードに，初期メッシュおよび解析の途中で既存の節点群からメッシュを自動生成する機能と，新たな節点を付加，あるいは不要な節点を除外する節点再配置機能，という 2 つの仕様・機能を実装した．リメッシュにより，変形履歴を保持する物質点がと節点位置が整合しなくなるので，物理量のリマッピングアルゴリズムを開発して実装した．また，繰り返し負荷などのいくつかの数値解析により詳細な精度検証も行った．次に，これをマルチスケール解析におけるミクロ構造の解析が可能なものに改変した．特にミクロマクロ連成解析プログラムへの組み入れを前提として周期境界条件に対応させることに注力するとともに，手法の持つ数値的不安定性を回避するために，安定化項を付加したプログラムへと改良し，厳密解あるいは参照解のある問題を設定して精度検証を行った．特に大変形問題については，市販の汎用 CAE

ソフトウェアなどとの比較により，精度保証をするほか，従来の要素ベースの FEM では追従できないような非常に大きな変形まで解析が続行できることを確認した．さらに，研究計画には無かったが，節点積分の考え方を亀裂進展問題にも適用できるよう拡張したアルゴリズムを開発し，その適用性・有用性を確認した．

(2) 節点積分有限要素法（NI-FEM）

NI-FEM は連続体解析手法として提案された有限要素解析手法の一つである．従来の有限要素法（EI-FEM）は要素内の積分点に要素として物理量の情報を付与するのに対しNI-FEM の最大の特徴は,

・ 節点ならびにその影響範囲となる多角形領域を粒子のようにみなすことができる
・ すべての物理量をその節点上で評価可能である．したがって，有限要素モデルの要素形状から作成されるそれぞれの節点に物理領域で平均的に評価し，その領域間では節点値を用いた補間近似により物理量の連続分布を仮定することができる．以下，NI-FEM の大変形問題における定式化を簡単にまとめる．

NI-FEM では領域Ωを三角形要素を用いて次のように空間的に離散化する(図 1 参照).

$$\Omega = \sum_{n=1}^{N_n} \Omega_N$$

ここで，N は領域の節点数，Ω_N は節点N の影響領域である．また，このΩ_N の面積は次式で与えられる．

$$\bar{A}_N = \sum_{e=1}^{M_N} A_N^e = \sum_{e=1}^{M_N} \alpha_e^N A_e$$

ここで，M_N は節点N を含む要素Ω_e の数，A_e はΩ_e の面積，A_N^e は要素eの節点N の影響領域である．また，α_e^N は$\alpha_e^{N_1} + \alpha_e^{N_2} + \alpha_e^{N_3} = 1$を満たすものとする．

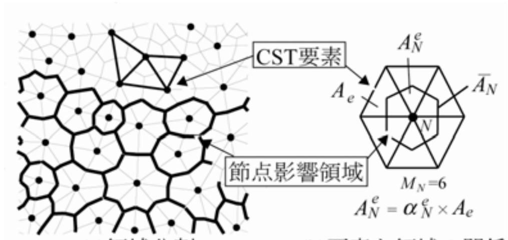
一方, NI-EFM におけるΩ_N での変形の近似について述べる．いま，大変形解析における従来の EI-FEM では要素eの変形勾配F_{iJ}^eを次のように近似式する．

$$F_{iJ}^e = \sum_{\alpha=1}^{3} x_{\alpha,i}^e \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial X_J}$$

ここで，X_I は現座標および初期座標，$x_{\alpha,i}^e$ とN_α^e はそれぞれ要素eの節点α の節点座標と形状関数である．このとき，NI-FEM における節点N の影響領域A_N^e での変形は対応する EI-FEM における節点N 周りの要素の変形の平均として次式で与えられる．

$$F_{ij}^N = \frac{1}{\bar{A}_N} \sum_{e=1}^{M_N} \left(\alpha_e^N A_e \sum_{\alpha=1}^{3} x_{\alpha,i}^e \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial X_J} \right)$$

そして，節点N の影響領域での応力σ_{ij}^N は構成則により評価されるので，節点値として付与されることになる．



(a)領域分割　(b)要素と領域の関係

図 1：NI=FEM による離散化

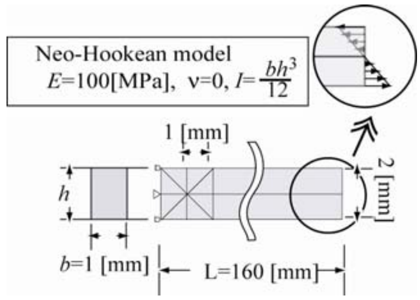
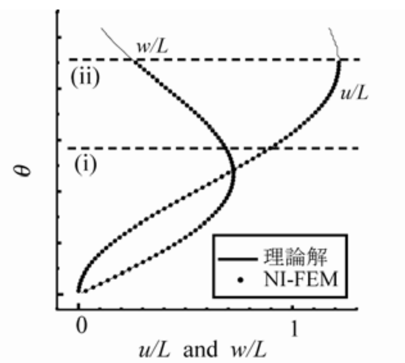
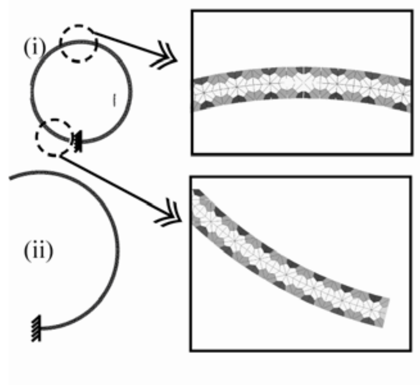


図 2：はり状 2 次元モデルと解析条件



(a) 理論解と近似解の比較



(b) 変形図および**von-Mises**等価応力分布

図 3： NI-FEM の精度検証結果

(3) 単純はりの純曲げ解析による精度検証

均質材料の平面はり構造に対して，端部に曲げモーメントに相当する分布外力を与え，NI-FEM による純曲げ解析を実施し，解析結果を理論解と比較した．なお，各材料定数や

構造寸法などは図 2 に示す通りである．

x 方向変位を u，y 方向変位を w，梁の端点の勾配を θ としてこの問題の理論解を以下に示す．

$$\frac{u}{L}=1-\frac{\sin\theta}{\theta},\ \frac{w}{L}=\frac{1-\cos\theta}{\theta},\ \theta=\frac{ML}{EI}$$

ここで，M は端面に与えられるモーメント，L は梁の長さ，EI は断面曲げ剛性である．数値解析結果を図 3 に示す．全体的に NI-FEM の近似解は理論解と一致していることが分かり，NI-FEM の曲げ解析に対する性能が良いことがわかる．

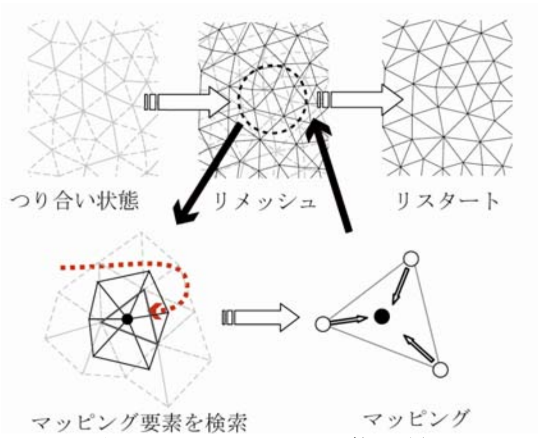


図 4：リメッシュと物理量のマッピング方法

(4) 節点分布を更新する節点積分有限要素法

・ 計算アルゴリズム

本研究で提案する手法では，増分解法における各時間ステップにおいて，解析ステップとリメッシュステップという 2 種類のサブステップを繰り返すことにより物体の平衡状態を更新する．

各時間ステップでは，まず荷重増分に対して物体の平衡状態を Newton-Raphson 法の収束計算により算出する．次に，リメッシュステップでは，解析ステップで算出された物体の平衡状態において任意に設定したリメッシュ基準を満たしているか否かを判定し，満たしている場合には領域内にランダムに分布するような新しい節点集合を再定義してデローニー三角分割法によりリメッシングを行うことで健全な状態のメッシュを生成する．そしてリメッシングにより生成された節点の物理情報は，リメッシング前のつり合い状態の節点情報および幾何形状をもとに線形補間することで更新する．

なお，リメッシュの実施基準だけでなく，リメッシュ時の節点集合の定義方法，節点数の増減などの変化は任意に定義することができる．

・ 物理量の投影方法

NI-FEM では，変位だけでなくすべての物理量は節点で評価される．したがって，本研究で提案するアルゴリズムにおいて，リメッシング時のデローニー三角分割によって新たに設置された節点の物理量は，前ステップにおける釣り合い状態の節点の情報からマッピングすることで連続分布を保持することができる．具体的には，図 4 に示すように新たに生成した節点の物理情報は，その節点が前ステップにおけるメッシュ内で含まれる要素を抽出し，その要素を構成する節点の物理情報から形状関数を用いて以下に示すような線形補間を行う．

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=N_1^e(\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}_1^e+N_2^e(\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}_2^e+N_3^e(\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}_3^e$$

ここで，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ は新たな節点の物理情報であり，$N_\alpha^e(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{F}_\alpha^e$ は前ステップにおいてこの新たな節点を含む要素 $\boldsymbol{e}$ を構成する節点の形状関数および物理情報である．なお，投影する物理量は変位 $\boldsymbol{u}$，右 Cauchy-Green テンソル $\boldsymbol{C}$ などが考えられるが，本研究では応力評価という目的から変形勾配を投影することにした．

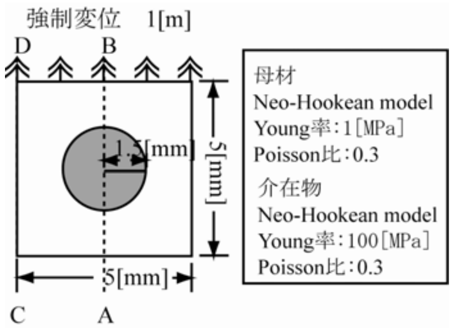


図 5：リメッシュ・マッピングに関する検証のための解析モデルと解析条件

・ リメッシュ・マッピング精度検証

本解析では次の 3 ケースについて図 5 に示す円形の介在物を有する構造に対して節点積分有限要素法による一軸引張問題の大変形解析を行い,リメッシングによる節点数の変化の解析結果への影響を調査する．具体的な，検討方法としては，リメッシングを行うごとに，以下の 3 ケースの解析を実施して，それぞれの精度を比較することにする．

① 載荷・除荷時節点数変化無し
② 載荷時節点数増加・除荷時節点数増加
③ 載荷時節点数増加・除荷時節点数減少

なお，リメッシュの実施基準は任意に設定できるが，本解析ではマッピングの精度検証を効率良く行う目的で，リメッシュの回数が多くなるよう，鈍角を含む要素が 1 つ以上存在する場合に実施することとした．また，参照解はほぼ同程度の自由度で 4 角形要素を用いた EI-FEM による数値解析解である．境界条件，構成モデル，時間ステップ等は同一の条件で行った．

解析結果として，構造物上辺の伸長比と見

かけの応力を図 6 に示す．これらの図からリメッシュの際に節点数を変化するケースと③の解析結果は，変化しないケース①の解析結果と一致していることがわかり解析途中の節点数の変化が結果に与える影響は小さいことが確認できる．また，載荷・除荷の応答が一致せず，除荷終了時に多少の残留応力が見られるが，これにはペナルティー法やマッピングの影響が含まれると考えられるが，解析全体としての精度は良く，提案した解析手法の有効性が主張できる．なお，節点数の変化は解析精度に大きな影響を与えることはなかったが，解析を通して大きな自由度の解析を行えば解析精度は高められることを付記しておく．

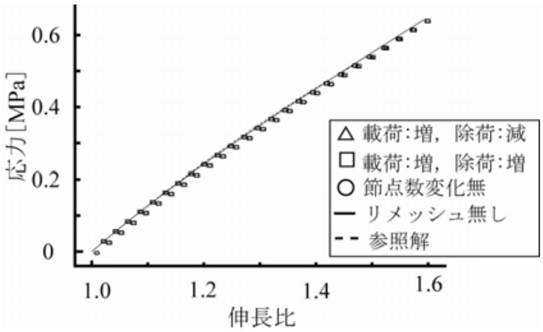


図 6：リメッシュ・マッピング
に関する検証結果

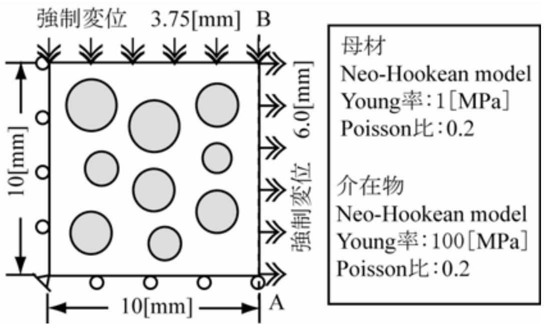


図 7：非均質体への適用性検証のための
解析モデルと解析条件

(5) 非均質体への適用性検証

図 7 に示すようなゴム材のミクロ構造を模擬した複雑な非均質構造に対して NI-FEM を適用することでそのロバスト性を評価するとともにマルチスケール解析への適用性について検証する．ここでの解析では変位拘束による境界条件を同図に示すように設定した．具体的には，マクロ構造では一軸引張試験を実施していることを想定して，ミクロ構造のマクロ変形を制御する拘束条件を設定した．また，詳しい拘束条件および構成モデル，各材料定数等は併せて同図に示す．

数値解析結果として，図 7 に示す A-B 面上の変位-見かけの応力関係を図 8 に示す．またここに示す曲線上の点 C，D における応力分布を図 9(a)と(b)に示す．

これらの図より，非均質構造を対象とした大変形解析においても EI-FEM と定量的に良好に一致する近似解を得ることができ，実構造に近い複雑なモデルに対しても提案手法の有用性を主張できる．また図 8 から，従来の NI-FEM に比べ，提案する節点分布を更新する NI-FEM の方がロバストであることがわかり，提案する手法の優位性およびマッピングの精度を確認できる．ただし，今回 EI-FEM が最もロバストな結果となった．これは，NI-FEM では節点の物理情報は節点周りの領域の物理情報の平均であるため，影響領域の面積に大きく影響をうけることが原因であると考えられる．この問題については今後の課題としたい．

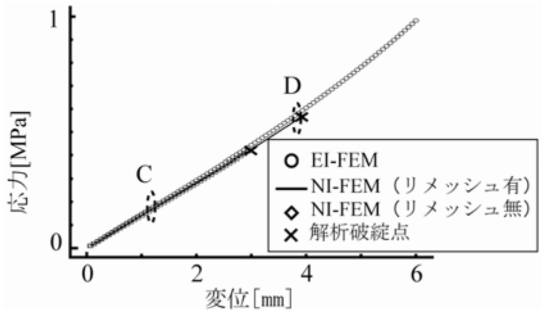


図 8：非均質体への適用性の検証結果 1

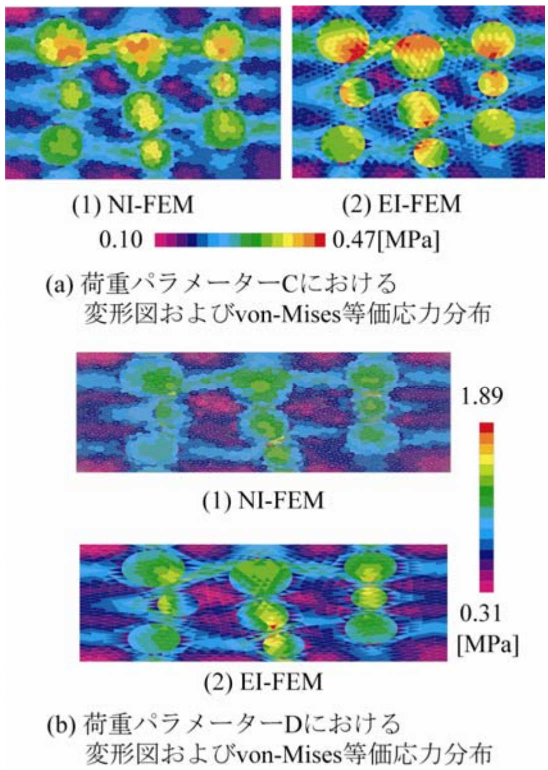


図 9：非均質体への適用性の検証結果 2

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① 車谷麻緒，寺田賢二郎，節点積分を応用した簡易なFEMベースのひび割れ進展解析手法，計算工学会論文集，論文番号20080002，2008，査読有.
② 車谷麻緒，岩田暁，寺田賢二郎，岡澤重信，樫山和男，Cohesive crack モデルを用いた準脆性材料の動的破壊解析手法に関する基礎的研究，応用力学論文集，土木学会，11, pp.201-209, 2008，査読有.
③ 車谷麻緒, 寺田賢二郎, 複合材料の非線形解析のためのイメージベース節点積分有限要素法，応用力学論文集，土木学会，10, pp.91-100, 2007，査読有.

〔学会発表〕（計７件）

① M. Kurumatani, K. Terada: A Method for Crack Simulations of Heterogeneous Solids using Nodal-Integration FEM, 8th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM8) and the 5th. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008), the Lido Island in Venice (Italy) on 30 June - 4 July 2008.
② M. Asai, K. Terada, A. Maruyama，Eulerian finite cover method for multi-scale analysis of large deformed composites, 8th World Congress on Computational Mechanics, WCCM8-ECCOMAS 2008, the Lido Island in Venice (Italy) on 30 June - 4 July 2008.
③ 車谷麻緒，寺田賢二郎，節点積分近似による応力の連続性を利用した固体の非線形解析，第 13 回計算工学講演会，2008 年 5 月 19-21 日，仙台.
④ 車谷麻緒，寺田賢二郎，京谷孝史，節点積分を応用したFEMベースひび割れ進展解析手法の開発とその応用, 第 13 回計算工学講演会，2008 年 5 月 19-21 日，仙台
⑤ K. Terada, M. Kurumatani, Multiscale simulation of deterioration of concrete atructures due to crack propagation coupled with mass diffusion, The 2nd Korea-Japan Workshop on Computational Engineering, Seoul, Korea, 31 August - 2 September, 2007.
⑥ 車谷麻緒・小島隆嗣・寺田賢二郎, 節点積分有限要素法の近似性能に関する基礎的検討, 日本計算工学会，第 12 回計算工学講演会，2007 年 5 月 22-24 日，東京.
⑦ 車谷麻緒，寺田賢二郎, 節点積分有限要素法による非均質材料・構造物の弾塑性解析, 日本計算工学会，第 12 回計算工学講演会，2007 年 5 月 22-24 日，東京.

〔図書〕（計０件）
〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）
○取得状況（計０件）
〔その他〕
　なし

６．研究組織
(1)研究代表者
　寺田　賢二郎　（TERADA KENJIRO）
　東北大学・大学院工学研究科・准教授
　研究者番号：40282678

(2)研究分担者
　　なし

(3)連携研究者
　　なし