

機関番号：12601

研究種目：若手研究（A）

研究期間：2007 ～ 2009

課題番号：19684001

研究課題名（和文） 複素解析的な葉層構造およびベクトル場の研究

研究課題名（英文） Study of holomorphic foliations and vector fields

研究代表者

足助 太郎（ASUKE Taro）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：30294515

研究成果の概要（和文）：複素解析的な葉層構造のカテゴリーにおける，Godbillon-Vey 類の剛性の証明を得た．また，葉層の連続変形から定まるある不変量と，Godbillon-Vey 類の剛性が深く関連することも明らかにした．このほかにも，複素余次元 1 の複素解析的な葉層構造の Fatou 集合・Julia 集合の簡明な定式化を新たに得た．Fatou 集合の分類を行ったほか，不変計量や共形測度に関する基本的な性質についても調べた．

研究成果の概要（英文）：I studied the Godbillon-Vey class of transversely holomorphic foliations, and showed that it is rigid under continuous deformations in the category of transversely holomorphic foliations. It is also shown that an invariant of deformations of foliations is closely related to the rigidity. I also introduced a new, simple definition of Fatou and Julia sets of transversely holomorphic foliations. A classification of Fatou components and some fundamental properties concerning invariant metrics and conformal measures are obtained.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2008年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2009年度	2,000,000	600,000	2,600,000
年度			
年度			
総計	6,000,000	1,800,000	7,800,000

研究分野：微分位相幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：葉層構造，Bott 類，Godbillon-Vey 類，Fatou 集合，Julia 集合

1. 研究開始当初の背景

複素解析的な葉層構造・ベクトル場は，複素解析的な力学系としてそれ自身興味もたれるほか，余次元・次元が高い葉層構造・ベクトル場の特別な場合としても重要である．これらについての系統的な研究は比較的最近であるため，基本的なものを含め多くの問題が残されている．これらの解決のためには，従来の幾何学的手法を発展させつつ，一方，解析的な手法をより積極的に取り入れてい

く必要があると考えられる．そのため，単に問題を解決するのみならず，研究手法の開発も必要であると考えられる．また，近接分野として，いわゆる複素力学系（複素解析的な写像の反復合成の力学系）や，クライン群の研究が挙げられる．これらの研究を直接的・間接的に援用できるような研究手法の開発も重要である．

2. 研究の目的

複素解析的な葉層構造・ベクトル場について、以下の事柄を柱として研究を行い、これらの諸性質を明らかにする。

- (1) 特性類を通じた、複素解析的な葉層構造の幾何学的・力学的な性質の解明：
Godbillon-Vey 類は複素解析的な葉層構造の研究においても重要であるが、一方、これは Bott 類と Chern 類の積に分解される。これは複素解析的な葉層構造特有の現象であるので、特にこの点に着目して研究を進める。
- (2) 特異点を持つ葉層構造やベクトル場の性質の研究への特性類の応用：
複素解析的な葉層構造やベクトル場はしばしば特異点を持つ。このような場合に特異点に着目した研究は多いが、従来の、特異点を持たない葉層構造に関する研究との関連を念頭においた研究を進める。
- (3) 複素解析的な葉層構造やベクトル場の幾何学的な研究手段の開発・改良：
複素解析的な葉層構造やベクトル場の研究は今までも幾何学的に行われているが、それは（微分）位相幾何学的な側面が強く、複素解析的な構造をさらに積極的に用いていく余地が残されている。例えば写像の反復合成の力学系においては函数論などの手法を幾何学的に用いることにより深い結果を得ている。これらを参考にして、研究手段を開発・改良していく。

これらは便宜的に分割しているが、独立のものではなく、それぞれの研究が他の研究の推進において重要である。

3. 研究の方法

日常的な研究のほか、国内外の研究集会に参加するなどして、近接分野の研究者と研究連絡を取り合い、最新の情報の収集に努めた。特に大規模な国際研究集会として

Global and Local Aspects of Holomorphic Foliations (ブラジル, 2008 年)

および

VIII International Colloquium Santiago de Compostela (スペイン, 2008 年)

に参加した。前者は複素解析的な葉層構造・ベクトル場を主題としたもの、後者は葉層構造・ベクトル場を総合的に扱ったものである。これらの研究集会を含む、複数の国内外の研

究集会において講演を行い、成果を発表した。また、書籍や講究録などの研究資料も随時収集した。

4. 研究成果

(1) 複素解析的な葉層構造のカテゴリーにおける、Godbillon-Vey 類の剛性の証明を得た。Godbillon-Vey 類は葉層構造の最も重要な不変量である。これは一般の葉層構造については、葉層構造の変形に応じて連続的に変化することが知られている。複素解析的な葉層については事情が異なり、葉層が連続的に変形しても Godbillon-Vey 類は変化しないこと（剛性）が示された。これにより、特性類の理論は実のカテゴリーと複素のカテゴリーでは、定義がほぼ同一であるにもかかわらず大きく異なることが示され、今後のこの方面の研究の出発点の一つとなることが期待される。証明の過程で、葉層構造の無限小変形による複素二次特性類の微分を定義した。複素二次特性類は同一のものであってもいくつかの表現があり得るが（同値類の代表元の取り方に任意性があるが）、従来は表現（代表元）を固定した場合の微分が定義されていた。本研究の目的にはこれでは不足であったため、表現の方法によらない微分を定義し、これが従来のもので一致することを示した。これにより、複素二次特性類の無限小微分を実二次特性類の無限小微分と比較することが容易になった。一方、これらとはやや独立に、葉層の連続変形から定まるある不変量と、Godbillon-Vey 類の剛性が深く関連することも示された。この種の不変量の性質は今のところほとんど何も分かっておらず、やはり今後の研究の基礎となることが期待される。これらの成果は研究目的の(1)および(3)におおよそ対応する。

(2) 複素余次元 1 の複素解析的な葉層構造の Fatou 集合・Julia 集合の定式化を得た。Fatou 集合・Julia 集合は、それぞれ複素 1 次元力学系における最も重要な概念の一つである。複素解析的な葉層構造についてもこの種の集合が定義され、良い性質を持つことが期待されていた。このような集合は Ghys, Gomez-Mont, Saludes らによりまず導入されたが、その性質は期待されるものとやや異なるものであり、また、定義が他の種類の力学系における Fatou 集合・Julia 集合のそれと直接的には同一ではなかった。本研究の結果、新たな Fatou 集合・Julia 集合の定義を得、これらを解決することができた。新たな定義は非常に簡明なため、葉層構造のみならず、古典的な複素 1 次元力学系を包括するような概念が得られることが期待される。その場合、いわゆる Sullivan の辞書として知られているうちのいくつかの事柄については、

様々な力学的に通有的であることが示されると考えられる。例えば、本研究で得られた Fatou 集合には古典的（一般的）な意味での Fatou 集合と類似の分類が存在するほか、Poincaré 計量に相当する不変計量をその上で構成することができる。また、Julia 集合上には共形測度を構成することができるが、これも古典的な意味での Julia 集合の性質の類似と言える。これらについて研究を進めることは今後の重要な課題である。これらの成果は研究目的の(1)、および(3)におおよそ対応するが、(2)にも関連が深い。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

1. Taro Asume, A Fatou-Julia decomposition of transversally holomorphic foliations, *Annales de l'Institut Fourier*, 査読有, 印刷中.

2. Taro Asume, Infinitesimal derivative of the Bott class and the Schwarzian derivatives, *Tohoku Mathematical Journal*, 査読有, vol. 61, 2009, 393-416.

3. Taro Asume, On the Fatou-Julia decomposition of transversally holomorphic foliations of complex codimension one, *Proceedings of the VIII International Colloquium Santiago de Compostela*, 査読有, 2009, 65-74.

4. 足助太郎, 複素余次元 1 葉層の Fatou-Julia 分解について, 京都大学数理解析研究所講義録, vol. 1661, 葉層の微分幾何とベルグマン核, 査読無, 2008, 1-20.

5. Taro Asume, On the Fatou-Julia decomposition of transversally holomorphic foliations of complex codimension one, *Singularities - Niigata-Toyama - 2007*, 査読有, *Advanced Studies in Pure and Applied Mathematics*, vol. 56, 2009, 39-47.

[学会発表] (計 11 件)

1. 足助太郎, Comparing Julia sets, 複素力学系とその周辺分野の総合的研究, 2009/12/17, 京都.

2. 足助太郎, 葉層の二次特性類の無限小微分について, 複素解析的ベクトル場・葉

層構造とその周辺, 2009/12/11, 京都.

3. 足助太郎, 葉層の二次特性類の無限小微分について, 複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺, 2009/12/11, 京都.

4. Taro Asume, Embeddings of 2-tori transversal to linear vector fields on \mathbb{C}^2 , 葉層構造と微分同相群研究集会, 2009/10/29, 玉原.

5. 足助太郎, 二次特性類の無限小微分とジェット束について, 「山代微分トポロジー」研究集会, 2009/8/19, 石川.

6. 足助太郎, 葉層の Fatou-Julia 分解について, 日本数学会年会, 2009/3/27, 東京.

7. 足助太郎, 複素余次元 1 葉層の Fatou-Julia 分解について, 葉層の微分幾何とベルグマン核, 2008/12/15-16, 京都.

8. 足助太郎, 複素余次元 1 葉層の Fatou-Julia 分解について, 「山代微分トポロジー」研究集会, 2008/8/28, 石川県.

9. Taro Asume, On the Fatou-Julia decomposition of transversally holomorphic foliations of complex codimension one, *VIII International Colloquium on Differential Geometry*, 2008/7/11, Santiago de Compostela (Spain).

10. Taro Asume, A Fatou-Julia decomposition of complex codimension-one foliations, *Global and Local Aspects of Holomorphic Foliations*, 2008/2/15, Angra dos Reis (Brazil).

11. Taro Asume, On the Julia-Fatou decomposition of complex codimension-one foliations, *Niigara Workshop on Complex Geometry and Singularities*, 2007/8/24, 新潟.

[図書] (計 1 件)

1. Taro Asume, *Mathematical Society of Japan, Godbillon-Vey class of transversely holomorphic foliations*, 2010, 印刷中

6. 研究組織

(1) 研究代表者

足助 太郎 (ASUKE Taro)

東京大学・大学院数理科学研究科

研究者番号：30294515

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：