

平成 22 年 4 月 25 日現在

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007 年度～2010 年度

課題番号：19700012

研究課題名（和文） アルゴリズムの構造を反映する数理モデルの構成と応用

研究課題名（英文） Mathematical semantics of the internal structure of algorithms

研究代表者

倉田 俊彦（KURATA TOSHIHIKO）

法政大学・経営学部・教授

研究者番号：40311899

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：プログラム意味論，ラムダ計算，型理論，層論，領域理論，外延性，高階逐次性

1. 研究計画の概要

本研究課題はプログラムの表示的意味論に関するものであり、「従来のモデルとは本質的に異なる特徴を持つ数理構造の構築」と「そうした構造の一般的な特徴をプログラミング言語の実装の観点から考察すること」を目的としている。

プログラムの普遍的な意味を与える数理構造には CCC（カルテシアン閉圏）の性質が必要不可欠であるが、既知の研究の多くは、(数理論理学における伝統的なモデルの構成と同様に) 外延性を伴う概念を用いた CCC 構造によるものが大多数となっている。このように必要以上に強い概念が取り入れられたモデルにおいては、プログラムの入出力の関係のみに依存してその意味が決められることになり、計算機科学に特有の概念であるアルゴリズムの内部構造を捉えることは不可能である。これに対して、本研究課題の目的は、(利便性のために取り入れられていた) 外延性の概念を排除する形で、従来の理論と同様に様々なデータ構造の構文を矛盾なく解釈できるモデルの構成を与え、「出力を得るまでのアルゴリズムの構造の違いを反映できる数理モデル」の理論を確立することにある。

こうした視点の下では、様々な興味深い課題が考えられるが、その中でも最も大きな問題は「外延性を排除した CCC の形式を保ちながら、多様なデータ型を伴う強い表現力を持った構文体系の解釈を可能とするための仕組みを兼ね備えていて、更には、プログラム（特にラムダ計算）の有限近似性や高階逐次性等の特徴を反映している構造を実現する

こと」にある。

2. 研究の進捗状況

上に述べた課題に対して、考察の初期段階で大きな進展があった。具体的には、位相空間 (X, OX) から Sets（集合と関数の圏）への反変関手に一種の *compatibility* の概念を付随して定義される通常層の概念に対して、Sets（集合と関数の圏）の部分全てを Cpos（完備半順序集合と連続関数の圏）に置き換えても *compatibility* の条件をそのままの形で扱うことが可能で、それによって新たに Cpos(X)（完備半順序集合の層とその上の自然変換の圏）の概念を定義することができた。更に、こうして新たに得られた圏 Cpos(X) の特徴として、

- (1) 任意の 2 つの層の間に定義される自然変換に対して、自然な順序を導入することが可能であり、それによって自然変換の集合自体も完備半順序集合となることが証明できる。そして、このことが 2 つの層の冪の存在を保証し、直積や終対象の存在も同様に証明できるので、Cpos(X) は CCC となる。
- (2) Cpos(X) においては、従来のプログラム意味論における領域方程式の解法と同様の手法を展開することが可能で、任意の拡大列に対して、その双極限（ある種の見方によって射影極限かつ帰納極限）となる層を構成することができる。更に、Cpos(X) 上の任意の連続関手（双極限を保存する関手）に対してその不動点となる

層を構成することができる。

が分かり、一般的に $Cpos(X)$ が十分な大域断面を持たないことから、「 $Cpos(X)$ は外延性を排除しながら様々なデータ構造や型無ラムダ計算のような強力な構文を矛盾なく解釈することが出来る数理モデルの一般的な枠組」を実現し、既知の研究にはない長所を数多く持つことが保証される。これによって、骨格となる理論的枠組の導入については完全に解決されたといえる。

3. 現在までの達成度

② おおむね順調に進展している。

本研究課題の考察を進めるにあたって、最も困難な課題と思われた「アルゴリズムの違いを反映できる数理モデルの一般的な枠組みの構築」については「完備半順序集合の層」の概念によって理想的な形で解決できた。その意味で、本研究課題に関する最も重要な部分については当初の予想以上に進展していると考えている。また、そうした進展に伴って興味深い新たな問題が沢山派生する結果となり「他の細かな課題に対する考察」や「今回得られた枠組みを（既知の考察を含めた）より広い視点から観察しまとめる作業」については作業が発散していく傾向にある。それらを総合的・客観的に判断しても、今回の研究課題に関する考察は順調に進展していると考えている。

4. 今後の研究の推進方策

今後の課題としては、「既知の研究で考案された枠組と $Cpos(X)$ の比較を行い、両者の関係を明らかにすること」が重要であると考えている。

具体的には、「PCF と呼ばれるプログラム体系に対する fully-abstract モデルの構築」の動機から「アルゴリズムの内部構造を反映する具体的な数理モデルの構成」が幾つか得られていて、「そうした枠組が層の概念を特殊化することによって得られないか？」更に「できない場合は全てを統一的に説明できるより抽象的な概念が存在しないか？」を明らかにすることが（今回得られた概念の位置付けを明らかにするためにも）必要であると考えている。これについて、現時点では、部分的な対応関係が得られているので、その結果を足掛かりに完全な対応を完成させたい。

5. 代表的な研究成果

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）

- ① 倉田俊彦, 完備半順序集合の層に関する双極限の構成, 京都大学数理解析研究所講究録 1635 (査読無), 2009 年 4 月, 60-76 ページ。

〔学会発表〕（計 4 件）

- ① 倉田俊彦, Sheaf Semantics and Higher Order Sequentiality, 日本数学会年会 (分科会特別講演), 2009 年 3 月 26 日, 東京大学数理科学研究科。
- ② 倉田俊彦, A fixed point construction for continuous functors on sheaves of $dcpos$, 日本数学会秋季総合分科会, 2008 年 9 月 27 日, 東京工業大学。
- ③ 倉田俊彦, Lambda-algebras by inverse limit construction on sheaves of $dcpos$, RIMS 共同研究: 証明論と論理・計算の構造, 2008 年 9 月 8 日, 京都大学数理解析研究所。
- ④ 倉田俊彦, 完備半順序集合の層について, 証明論研究集会, 2007 年 12 月 3 日, 首都大学東京。

〔図書〕（計 1 件）

- ① 倉田俊彦, 京都大学数理解析研究所考究録 1635 RIMS 共同研究: 証明論と論理・計算の構造報告集, 京都大学数理解析研究所, 2009 年, 133 ページ。