

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2007～2010

課題番号：19700013

研究課題名(和文) 大規模連立一次方程式に対する高速かつ高品質な精度保証法に関する研究

研究課題名(英文) A Study on Fast and High-quality Verified Numerical Computation for Large-scale Linear Systems

研究代表者

荻田 武史(OGITA TAKESHI)

東京女子大学・現代教養学部・講師

研究者番号：00339615

研究分野：精度保証付き数値計算

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：精度保証付き数値計算、数値線形代数、高精度計算

1. 研究計画の概要

本研究では、大規模連立一次方程式に対する実用的かつ高品質な精度保証付き数値計算法の開発を目的としている。具体的には、連立一次方程式が与えられたとき、係数行列の正則性を保証し、計算機上で解いて得られた数値解の厳密解に対する誤差の上限を、高速かつ厳密に計算する精度保証付き数値計算法の理論とアルゴリズムを開発することである。

具体的には、下記の3つを目的とする。

(1) 密行列については、特に悪条件な問題でも可能な限り高速に精度保証が実行できるようなアルゴリズムを開発する。

(2) 疎行列については、一般的な疎行列を扱うのは非常に困難であるため、本研究では疎行列が持つ特殊な性質や構造を持つような問題に対して効率的なアルゴリズムを提案し、必要なメモリ量や計算量を低減した実用的な精度保証法を開発することを目標とする。

(3) 近年、応募者らが開発した高精度内積計算アルゴリズムと上記の精度保証法を融合し、精度保証自体の品質を向上させる方法も開発する。

2. 研究の進捗状況

(1) 密行列に関する研究

極めて悪条件な線形問題に対する精度保証方式である Rump 法の収束性に関する論文を発表した。この Rump 法は、S. M. Rump によって開発されてから、20年以上その解析がなされていなかったが、本研究によって Rump 法の部分的な解析に成功した。

また、悪条件問題に対する高品質な数値計

算法を開発した。特に、LU分解や Cholesky 分解を高精度に実行する方法について検討した。具体的には、条件数の大きさに応じて反復的に計算精度を増加させて高精度な解を得る適応的な行列分解法を開発し、それらが LU 分解や Cholesky 分解などの多くの重要な行列分解に適用可能であることを示した。

(2) 疎行列に関する研究

疎な正定値行列に対するメモリ量を低減した精度保証方式を開発し、学会等で発表した。本方式により、連立一次方程式の係数行列が100万次元程度の疎行列であっても、正定値行列であれば、その正定値性の保証も含めて数値解の精度保証が可能であることが示された。

また、優対角行列等の特殊な構造を持つ疎行列、さらにより一般的な行列に対する高速な精度保証法についての検討を開始した。

(3) 精度保証の品質向上に関する研究

高速かつ高精度なベクトルの総和や内積計算法を開発し、論文を発表した。これは、計算結果の精度を保証するという条件の下で現在、世界最高速のアルゴリズムである。このアルゴリズムを用いると、問題の難しさに対して適応的に計算精度を上げて必ず要求された精度まで正しい結果を得られる。

また、線形方程式に対する精度保証法自体の品質を高めるための研究を実施した。そのために、既存の高速かつ安定性のある数値計算ライブラリをそのまま活用できるような精度保証法に、高精度演算を用いた高品質な精度保証法を融合させる方式を提案した。これにより、誤差評価自体の質が判定可能となった。

3. 現在までの達成度

当初の計画以上に進展している。

特に下記の2点から、計画以上に達成できていると思われる。

(1) 悪条件問題に対する高精度アルゴリズムの統一的なフレームワークを構築した。当初の計画では、様々な行列分解を、一般的なフレームワークとして取り扱うことが可能になることは、想定外であった。これによって、LU分解、QR分解、Cholesky分解、特異値分解、固有値分解などを高精度に実行するアルゴリズムを、統一的に記述することが可能となった。

(2) 非常に高速な高精度内積計算アルゴリズムを開発した。当初の計画では、本研究で示したほどの計算速度向上は予想していなかった。本研究は、あらゆる科学技術計算の基礎となるため、応用範囲が極めて広い。直接的には、線形方程式の直接解法・反復解法、固有値分解、特異値分解等の数値線形代数への応用が挙げられる。

また、上記以外の計画についても、予定通り研究は遂行されている。

4. 今後の研究の推進方策

これまで当初の計画以上に研究を遂行できている点を最大限に活用し、本研究の最終目標を達成するべく、今後も革新的なアルゴリズムを提案しながら研究を推進する。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計11件)

- [1] T. Ogita, S. Oishi: Fast Verified Solutions of Linear Systems, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 26:2 (2009), 169-190. 査読有。
- [2] S. Oishi, T. Ogita, S. M. Rump: Iterative Refinement for Ill-conditioned Linear Systems, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 26:2 (2009), 465-476. 査読有。
- [3] T. Ogita, S. Oishi: Tight Enclosures of Solutions of Linear Systems, International Series of Numerical Mathematics, 157 (2009), 167-178. 査読有。
- [4] S. M. Rump, T. Ogita, S. Oishi: Accurate Floating-Point Summation Part II: Sign, K-fold Faithful and Rounding to Nearest, SIAM Journal on Scientific Computing, 31:2 (2008), 1269-1302. 査読有。
- [5] S. M. Rump, T. Ogita, S. Oishi: Accurate

Floating-Point Summation Part I: Faithful Rounding, SIAM Journal on Scientific Computing, 31:1 (2008), 189-224. 査読有。

[学会発表](計73件)

- [1] 荻田 武史: (特別講演) エラーフリー変換とロバストな行列分解, 日本数学会年会, 応用数学分科会, 慶応義塾大学 (2010/3/24-27)
- [2] T. Ogita: (Invited Seminar) Robust and Accurate Matrix Factorizations, Dagstuhl Seminar 09471: Computer-assisted Proofs - Tools, Methods and Applications, Dagstuhl, Germany (2009/11/15-20)
- [3] 荻田 武史: (招待講演) ロバストな行列分解アルゴリズムとその応用, 2009年並列/分散/協調処理に関する「仙台」サマナー・ワークショップ(SWoPP 仙台 2009), 仙台 (2009/8/4-6)
- [4] 荻田 武史: (招待講演) 高精度な行列分解アルゴリズムとその応用, 研究会「アルゴリズムによる計算科学の融合と発展」, 筑波大学 (2009/4/22-23)
- [5] T. Ogita, S. Oishi: (Invited Conference) Lower and Upper Error Bounds of Approximate Solutions of Linear Systems, Conference on Inequalities and Applications '07, Noszvaj, Republic of Hungary (2007/9/9-15)