様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　21年　6月　23日現在

研究種目：若手研究(B)
研究期間：2007～2008
課題番号：19700014
研究課題名（和文）
数式処理を施さずにシャープな評価を得る区間演算方式
研究課題名（英文）
On a Effective Variant of Interval Arithmetic without Formula Manipulation
研究代表者
宮田　孝富（MIYATA TAKATOMI）
金沢工業大学　情報学部　講師
研究者番号：30329114

研究成果の概要：
計算機を用いた数値計算において，結果を「約○○」の形で近似的に求めるのではなく，真の解を含む結果を「□□以上□□以下」の形で求める方法を精度保証付き数値計算という．解の上界および下界は通常「区間」というデータ構造によって与えられる．区間の幅を小さくするように精度保証付き解を求めることは重要なことである．本研究では，区間の両端点の他に変数間の相関を表現できる特殊なデータ構造によって区間を表すことで，区間幅の増大を抑えつつ方程式の精度保証付き解を得るための新たな知見を与えた．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
19年度	800,000	0	800,000
20年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,300,000	150,000	1,450,000

研究分野：　　　　　総合領域
科研費の分科・細目：　情報学・情報学基礎
キーワード：　　　　(A)計算理論

１．研究開始当初の背景

微分方程式などの連続数学の問題を，計算機の有限桁の浮動小数点数を用いて数値的に解きながら，演算結果の数学的な正しさを実用的なレベルで保証する，精度保証付き数値計算に関する研究が近年盛んに行われている．数値計算で生ずる誤差は，数値計算アルゴリズム由来の誤差と計算機の丸めの誤差に大別される．精度保証付き数値計算は，基本的には前者への対策としての不動点定理と後者への対策としての区間演算という２つの技術を組み合わせることで実現される．そして，精度保証した結果の良し悪しを測る尺度は，精度保証付き解の区間幅の大小である(区間幅が小さいほど良い結果である)．

しかるに，区間演算は「最悪値の保証」というその性質上，演算結果の過大評価による区間幅の増大が起きやすいという大きな欠点を持つ．この問題を克服するために，

通常は区間拡張(入力部分を実数から区間に単純に置きかえること)する前の式を(区間幅の増大が起きづらい形に)変形するなどの工夫がなされる．ただし，あるきまった入力区間に対して，「区間演算の定義に従って」計算した値域が最小となるような式の変形を「自動的に行う」ことは一般に難しい．

２．研究の目的

前節の背景に対し，本研究では区間のデータ構造を改良することで区間拡張する前の式変形を人間が行わなくても区間幅の増大を抑制できる方法を示すのが目的である．

３．研究の方法

変数間の相関を表現できる区間演算の有力な変種であるアフィン演算において，同類項のまとめを実装する．

４．研究成果

結論から言うと，初期の目的は部分的にしか達成されなかった．すなわち，多項式においては事前の式変形をとくに考慮することなしに同類項をまとめることができるが，三角関数などの初等関数はじめ他の非線形演算では計算の順序を工夫して事前に式変形をしておかないと（同類項のまとめができないことによる）過大評価が起きる．

そもそもアフィン演算において同類項のまとめの問題が起きるのは，アフィン演算では非線形演算のたびに新しい誤差項が追加されることが原因である．そのように追加された項の中に同類項があれば，それらをまとめても数学的に問題ないし，同類項をまとめるべきである．

しかし実装上は，誤差項が追加されるタイミングごとに新たなダミー変数が用意される．当初，この誤差項に(他の誤差項との区別をするための添え字以外に）演算子とオペランドを覚えておこうとしたがそれはうまくいかなかった．

その方針でうまくいかないのは，たとえば x の 3 乗と x の 2 乗の積でも x の 5 乗になり，x の 4 乗と x の積でも x の 5 乗になるように，たとえオペランドが違っても演算結果を同類項として取り扱うべき場合が出てくるからである．また，同類項のまとめを実現させるためにかかる計算コストが計算全体に占める割合が大きくなりすぎてしまう．

一方，-1～1 までの値をとるダミー変数 ε の部分を $\cos\theta$ とおき，それぞれ独立に動く変量に対して異なる θ を与える．こうすることで，それらの変数同士の積は三角関数の加法定理によって新たな θ を生成させることなく既存の θ だけを用いて表すことができる（演算結果もやはり $\cos\theta$ 型のダミー変数となる）．この方法を用いれば，同じオペランドから得られる積を異なるタイミングで与えても，演算結果を同類項としてまとめることができ，ひいては最終的な区間評価において（同類項のまとめができないという理由での）過大評価を防ぐことができる．

簡単な例を用いて説明する．たとえば $0\leqq x\leqq 2$，$-1\leqq y\leqq 1$ のもとで，スカラー値関数 $f(x,y)=(x-y)^3+3xy(x-y)$ の値域を計算する．通常の区間演算の定義にしたがった区間評価では $x=[0,2], y=[-1,1]$,
$f(x,y)=[-19,45]$ となる．一方，$f(x,y)$ と同値なスカラー値関数 $g(x,y)=x^3-y^3$ の値域を区間演算の定義にしたがって計算すれば $[-1,9]$ となるから，同値な式であっても最終的な区間評価に著しい差が生じることがわかる．同じスカラー値関数 $f(x,y)$ を従来のアフィン演算の定義にしたがって計算すると，$x=1+\varepsilon 1, y=\varepsilon 2$,
$f(x,y)=1+3\varepsilon 1+4\varepsilon 3+16\varepsilon 4+3\varepsilon 5+12\varepsilon 6$
$=3x+[-37,33]$ となる．上記の計算において $\varepsilon 2$ の項は打ち消されているが，$3x^2y$ や $3xy^2$ の項が打ち消されたわけではない．

これに対し，ダミー変数 ε の部分を $\cos\theta$ に置きかえる方法によれば，
$x1=1+\cos\theta 1, x2=\cos\theta 2$,
$(x-y)^2=(1+\cos\theta 1-\cos\theta 2)^2$
$=1+2\cos\theta 1-2\cos\theta 2+\cos^2\theta 1$
$-2\cos\theta 1\cos\theta 2+\cos^2\theta 2$
$=1+2\cos\theta 1-2\cos\theta 2+(\cos 2\theta 1+1)/2$
$+\cos(\theta 1+\theta 2)+\cos(\theta 1-\theta 2)$
$+(\cos 2\theta 2+1)/2$
$=2+2\cos\theta 1-2\cos\theta 2+0.5\cos 2\theta 1$
$+\cos(\theta 1+\theta 2)+\cos(\theta 1-\theta 2)$
$+0.5\cos 2\theta 2$
のように，三角関数の加法定理や倍角の公式，半角の公式を用いて変形していく．
最終的に，
$f(x,y)=2.5+1.75\cos\theta 1+1.25\cos\theta 2$
$+1.5\cos 2\theta 1+2\cos(\theta 1+\theta 2)+$
$2\cos(\theta 1-\theta 2)+0.25\cos 3\theta 1-0.25\cos 3\theta 2$
$+\cos(2\theta 1+\theta 2)+\cos(2\theta 1-\theta 2)$
$-\cos(\theta 1+2\theta 2)-\cos(\theta 1-2\theta 2)$
$\rightarrow 1.75x+1.25y+[-9.25,10.75]$ となる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）

〔学会発表〕（計１件）
Takatomi Miyata and Masachika Miyata, “How to Interpret Polylines Approximating Curves on a Surface”, Work in Progress, Frontiers in Education Conference 2008.
〔図書〕（計０件）
〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
宮田孝富（MIYATA TAKATOMI）
金沢工業大学・情報学部・講師
研究者番号：30329114