

平成 22 年 3 月 31 日現在

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007～2008

課題番号：19740010

研究課題名（和文） 虚数乘法をもつアーベル多様体の整数論とオイラー系

研究課題名（英文） The arithmetic of abelian varieties with complex multiplication and Euler systems.

研究代表者

坂内 健一 (BANNAI KENICHI)

慶應義塾大学・理工学部・講師

研究者番号：90343201

研究成果の概要（和文）：

本研究では、主に 1 次元のアーベル多様体である楕円曲線の場合について、ポリログや Eisenstein 類という数論幾何的な対象の研究、特にその  $p$  進実現の具体的決定についての研究を行った。具体的な成果としては小林真一氏、辻雄氏との共同研究を通して、虚数乘法をもつ楕円曲線が素数  $p \geq 5$  で非特異な超特異還元を持つ場合に、楕円ポリログの  $p$  進実現を、フロベニウスが絶対フロベニウス写像の 2 乗の場合に具体的に決定した。また、G. Kings 氏との共同研究を通して、 $p \geq 5$  が通常還元な素数の場合に modular 曲線上の Eisenstein 類の  $p$  進実現を具体的に決定した。

研究成果の概要（英文）：

In this research, we investigated motivic objects such as the polylogarithm and the Eisenstein classes, for the case of elliptic curves, which are one dimensional abelian varieties. We have obtained the following results. Through joint research with Shinichi Kobayashi and Takeshi Tsuji, we gave an explicit description of the  $p$ -adic realization of the elliptic polylogarithm for a prime  $p \geq 5$ , even in the case when the elliptic curve has complex multiplication and good supersingular reduction at  $p$ , for the Frobenius lifting which is the second power of the absolute Frobenius. Also, through joint research with G. Kings, we gave an explicit description of the  $p$ -adic Eisenstein class on the modular curve when  $p \geq 5$  is a prime of good ordinary reduction.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,200,000	0	1,200,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,300,000	330,000	2,630,000

研究分野：数論幾何、整数論

科研費の分科・細目：数学・代数学（4101）

キーワード：ポリログ、楕円曲線、アーベル多様体

## 1. 研究開始当初の背景

数論幾何学の主要な予想として、代数体上定義された代数多様体の Bloch-加藤予想と呼ばれるものがある。この予想は、「Hasse-Weil  $L$  関数」と呼ばれる複素関数が、その代数多様体の「数論的な情報」を記述していると主張している。代数体の Dedekind ゼータ関数の特殊値でその代数体の類数を記述する類数公式の大幅な一般化であり、楕円曲線の  $L$  関数の特殊値と楕円曲線の有理点の関係を予測する Birch-Swinnerton Dyer 予想とも関係する。

この予想を解決する1つの有効な方法として、オイラー系を用いる方法が知られている。オイラー系とは、対応する代数多様体に付随するガロア表現のガロア・コホモロジーに定義される、コホモロジー類の族である。ガロア・コホモロジーが代数多様体の数論的な情報と密接な関係にあることから、オイラー系を、代数多様体の  $L$  関数の値と関係づけるような形で構成することができれば、これは  $L$  関数と数論的な情報との間の重要な架け橋となる。オイラー系の構成は非常に根柢であることから、現在、良いオイラー系が実際に構成されているのは、1) 円分体、2) 虚2次体（含、虚数乗法（CM）をもつ楕円曲線）（Kolyvagin 1990）、3) Modular 曲線上の保型形式（含、有理数体上定義された楕円曲線、K. Kato 2006）など、限られた場合だけである。研究代表者は今までの研究において、「ポリログ」という motivic（数論幾何学的）な対象の  $p$  進的な性質や  $p$  進  $L$  関数との関係を研究することを通して、上記 1)、2) の場合に、オイラー系の構成方法を分析してきた。

## 2. 研究の目的

研究代表者の長期的な研究目標は、CM アーベル多様体の場合に、良いオイラー系の構成を試みることである。CM アーベル多様体の場合に注目した理由は、オイラー系の構成が知られていない場合の中で、最も基本的であると思われるからである。しかしながら3年程度の研究で、一般的な CM アーベル多様体の場合にオイラー系を構成することは極めて困難である。このことから、本研究では、 $L$  関数の値を motivic に捉えるという、オイラー系を構成する最初で最も重要なステップを研究することを目的とした。この中でも特に、最も基本的である CM 楕円曲線（1次元 CM アーベル多様体）の場合をより詳しく

理解することに主眼をおいた。

## 3. 研究の方法

本研究の目的を達成するために、主に3つの方向から問題に取り組むことにした。

(1) 最初の方向は、代数的テータ関数からの方向である。アーベル多様体のポアンカレ束に付随する代数的テータ関数と  $L$  関数値の関係を研究することを目指した。また、代数的テータ関数をポリログ層の関係を通して motivic に解釈することも試みた。

(2) 2つ目の方向は、Eisenstein 層の方法である。Eisenstein 級数を周期関数としてもつ混合層の構成についての研究である。モジュラー曲線の場合には、Beilinson によって定義された Eisenstein 類が Eisenstein 層を与えている。これの  $p$  進実現を G. Kings と共同で研究した。

(3) 3つ目の方向は、曲線のポリログを研究するという方向である。Beilinson-Levin および G. Kings 氏によって代数曲線のポリログというものが定義された。曲線に対してヤコビ多様体というアーベル多様体が定義され、曲線のポリログと付随するヤコビ多様体のポリログは密接な関係にある。曲線のポリログを研究することで、ヤコビ多様体のポリログについての理解が深まることが期待された。

## 4. 研究成果

最初の研究成果として、当該研究の根柢でもある小林真一氏（東北大理）との Eisenstein-Kronecker 数に関する共著論文、および小林氏・辻雄氏（東大数理）との楕円ポリログに関する共著論文を書き上げた。後者の結果については、以前通常還元まで完成していたところを、超特異な場合まで拡張することに成功した。 $p$  進楕円ポリログ関数が分配法則をみたすということが鍵であった。これらの論文は学術雑誌に投稿して、現在査読中である。以上の成果は、「研究の方法」の最初の方向に関わるものである。

また上記と平行して、ドイツの Kings 氏（Regensburg 大学）とモジュラー曲線上の Eisenstein 層の  $p$  進実現を具体的に決定した。結果として、Eisenstein 層の  $p$  進実現は、Katz によって定義された  $p$  進 Eisenstein 級数を用いて具体的に表せることを証明した。この結果も論文にまとめ、学術雑誌に現在投稿中である。以上の成果は、「研究の方法」の2

つ目の方向に関わるものである。

また、2007年度の1月(2008年1月)に、ドイツの David Blottiere 氏(Paderborn 大学)を2週間、名古屋大学へ招いた。Blottiere 氏はアーベル多様体のポリログ層の local system を current として具体的に決定した若い専門家である。アーベル多様体のポリログ層に関して多くの実りある議論を通して、有用な知見を得ることができた。同じく2007年度の後期には京都大学数理解析研究所の安田正大氏と、曲線のポリログの構成について考察を始めた。特に Kings 氏が曲線に対して定義した非可換ポリログが、Hodge 実現の場合にも定義されることを確かめた。以上の成果は、「研究の方法」の3つ目の方向に関わるものである。

以上が2007年度~2008年度の2年間の研究成果である。本研究は当初3年間の予定であったが、本研究の内容はより拡大した枠組みで捉えられることが期待され、2009年度以降、本研究の内容は研究課題「代数多様体の数論幾何的予想の解決に向けた戦略的研究」(若手研究(S)、研究課題番号:21674001)に引き継がれた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① K. Bannai and S. Kobayashi, Algebraic theta functions and Eisenstein-Kronecker numbers, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B4: *Proceedings of the Symposium on Algebraic Number theory and Related Topics*, eds. K. Hashimoto, Y. Nakajima and H. Tsunogai, December (2007), 63--78 (査読有) .
- ② K. Bannai, On the  $p$ -adic elliptic polylogarithm and the two-variable  $p$ -adic  $L$ -function for CM elliptic curves, Oberwolfach Research Report, Report No. 30 (2007), 1768-1770 (査読無) .

[学会発表] (計 9 件)

- ① 坂内健一, 楕円ポリログ, Eisenstein類と  $p$ 進  $L$ 関数, 日本数学会2008年度秋季総合分科会, 代数分科会・特別講演 東京工業大学, September 26, 2008.
- ② 坂内健一, 楕円ポリログと  $p$ 進  $L$ 関数, 代数シンポジウム, 岩手県盛岡市, August 7, 2008.
- ③ 坂内健一, Eisenstein-Kronecker数と代数的ゼータ関数, 日本数学会2008年度年会, 近畿大学, March 24, 2008.
- ④ 坂内健一, 1. Introduction, and the case of the Riemann zeta function  
2. Realizations of the elliptic polylogarithm for CM elliptic curves  
Number Theory Monthly Mini Workshop, POSTECH, Korea, October 27, 2007.
- ⑤ 坂内健一, 虚数乘法をもつ楕円曲線の  $p$ 進ポリログと2変数  $p$ 進  $L$ 関数, 「代数的整数論とその周辺」, 数理解析研究所, December 10, 2007.
- ⑥ 坂内健一, 楕円ポリログ, 夏の学校「多重ゼータ値とモチーフ」, 東北大学, July 27, 2007.
- ⑦ 坂内健一, On the  $p$ -adic Eisenstein-Kronecker series for CM elliptic curves, Number Theory Seminar, Regensburg University, Germany, June 29, 2007.
- ⑧ 坂内健一, On realizations of the elliptic polylogarithm, Algebraische Zahlentheorie, Oberwolfach, Germany, June 20, 2007.
- ⑨ 坂内健一, On the  $p$ -adic elliptic polylogarithm and the two-variable  $p$ -adic  $L$ -function for CM elliptic curves, Tambara Institute of Mathematical Science, June 8, 2007.

[その他]  
ホームページ等

<http://www.math.keio.ac.jp/~bannai/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

坂内 健一 (BANNAI KENICHI)  
慶應義塾大学・理工学部・講師  
研究者番号：90343201

### (2) 研究分担者

該当なし

### (3) 連携研究者

小林 真一 (KOBAYASHI SHINICHI)  
東北大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：80362226

辻 雄 (TSUJI TAKESHI)  
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
研究者番号：40252530

### (4) 海外研究協力者

Guido Kings  
Regensburg University (Germany)  
Professor