

機関番号：14602

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2007 ~ 2010

課題番号：19740015

研究課題名 (和文) 保型形式から見る類数公式と L 関数の特殊値

研究課題名 (英文) Class number and values of L-functions with cusp forms

研究代表者 市原由美子 (Yumiko Ichihara)

奈良女子大学・理学部・准教授

研究者番号：80372689

研究成果の概要 (和文) : 素数冪レベルの cusp form の空間を調べ、一部の old form の空間の直交基底を決定することができた。その結果の一つの貢献として primitive form に付随する L 関数の non-vanishing を調べることができた。

研究成果の概要 (英文) : I studied the space of cusp forms whose level is prime power and obtained an orthogonal basis of space of old forms. It's yielded the number of the new forms which L-function does not vanish.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	900000	0	900000
2008 年度	800000	240000	1040000
2009 年度	800000	240000	1040000
2010 年度	800000	240000	1040000
年度			
総計	3300000	720000	4020000

研究分野：整数論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：整数論

1. 研究開始当初の背景

二次体の類数と二次形式の類数は非常に深い関係があることは古くから知られています。また、二次体の類数については解析的類数公式によって Dirichlet の L 関数の $s=1$ における特殊値として表されていて、二次形式の類数については Kronecker と Hurwitz により興味深い類数公式が与えられています。この Kronecker と Hurwitz の類数公式から Hecke は類数を Fourier 係数にもつような重さ $3/2$ の保型形式の存在を示唆しました。つまり、保型形式と類数の関係性と L 関数の特殊値の間に深い関係があることが見えてくるのです。(その Hecke の示唆による問題は Cohen と

Zagier によって研究され、解決と更なる発展が示されました。)

さて、二次体の類数、二次形式の類数、保型形式、様々な L 関数、それぞれが現在までに様々な方法で研究されています。色々な視点による結果があり、ますますその視野が広がってきました。特に近年では保型形式やそれに関連した L 関数の研究、ある L 関数の特殊値を係数に持つような保型形式や Dirichlet 級数などの導入、といった研究が展開され、興味深い結果が多く示されています。それらの解析的な考察の成果を類数の研究に還元することを考えることは非常に魅力的で、かつ、とても大切な研究であるといえます。

2. 研究の目的

本研究の立場は、保型形式という類数と L 関数の特殊値をつなぐ立場に立ち、双方を眺め、保型形式や解析数論の議論によって類数を研究することです。

近年、解析数論で議論されることの多くはゼータ関数や L 関数であって、関数の性質という形で沢山の研究成果が得られています。これらの成果を類数という立場など、そのゼータ関数や L 関数が関係する他の整数論の研究視点から観察して、解析的な研究成果を代数的に言い換えることは、解析的な研究の意味や手法が類数を研究する上で大きく役立つことにつながります。整数論では多くの研究対象に関連して、ゼータ関数や L 関数が定義されているので、このような言い換えは整数論全体で研究の発展に貢献することができると考えています。また、解析数論における興味の幅の拡大にもつながると考えます。

具体的な研究の目的として、研究対象は類数や楕円曲線のランクなど、保型 L 関数の特殊値や零点の位数に注目します。これらは整数論の興味対象と密接にかかわることが知られています。しかし保型 L 関数の解析的な考察からそのような情報を知るという研究はまだ十分ではないと思われます。本研究では特に次の三つの点に注目したいと思います。(1) L 関数の解析的性質の研究, (2) 保型形式の空間の基底の研究, (3) 類数や楕円曲線の有理点の群のランクに関わる研究, です。

まず、既知の結果を他の保型 L 関数へ拡張することを目標とします。更に、具体的に保型形式を扱うことで新しい発見を目指します。最終的には、それらの研究を総合的に理解し、応用することを考えます。特に計算機を用いることを前提として有効な結果を得ることを考えます。また、特に特殊値に対しての応用は大切だと思います。Goldfeld と Hoffstein によって導入された Dirichlet の L 関数の特殊値を係数にもつ Dirichlet 級数の考察やその拡張を考えています。Goldfeld や Hoffstein はその L 関数の導入で、Dirichlet の L 関数の特殊値の平均の挙動の結果を得ることに成功しました。これは類数の問題や Siegel の零点に関わる内容なのでとても興味深いと思います。もっと多くの Dirichlet の L 関数、もしくは、他の L 関数について、特殊値の情報を調べられる可能性があると思うので、その研究にも取り組むべきであると思います。

また、零点との関連に注目することも大切です。整数論では素数定理の問題以来ゼータ関数や L 関数の零点の研究が一つの重要なテーマになります。何故なら、零点の場所が整数論の研究対象に対して大きな情報を持っているからです。特に L 関数については $s=1$ 付近での零点の非存在の証明が大問題になっています。それは Siegel の零点と呼ばれます。

Siegel の零点の非存在性は一般的には理論的にしか確かめられていません。数値的に零点の非存在の範囲を指定することが問題になっています。 L 関数の $s=1$ における値の下からの評価を数値的に得ることは、 L 関数の $s=1$ 付近における非零領域を数値的に得ることにつながっています。従って、Goldfeld と Hoffstein の研究を他の L 関数の特殊値に拡張することは Siegel の零点の問題と照らし合わせて、非常に大切だと考えられます。今までこのような研究は Riemann のゼータ関数や Dirichlet の L 関数に適用された方法、保型 L 関数同士の関係などを利用して調べられてきました。Goldfeld や Hoffstein の手法の拡張という視点で、新しい方法で L 関数の特殊値や零点を調べる方法を確立することはとても興味深く有意義なことだと思います。また更に、このような研究を通して、保型形式の Fourier 係数の新しい情報を得ることができのではないかと期待もあります。それは保型形式の空間を調べて、類数や楕円曲線の有理点の群のランクを研究するというテーマにも有効な結果をもたらすことが期待できます。

3. 研究の方法

既知の結果を他の L 関数に拡張する方法ですが、 L 関数自体の持つ性質を研究することにより、より深い性質を考察し、精密な情報や関連する内容の考察をします。

次に、保型形式の基底やその関係を具体的に調べます。特に計算機を用いての類数の計算に有効な研究をすることを目的としました。Pei の保型形式の基底に関する結果を具体的に書き下し、計算をすることで新たな発見を模索したり、別の基底を考え、その規定との関係に注目することで新しい結果を得ることを考えます。例えば楕円曲線との関係に注目すると primitive form に付随する L 関数を考察しなければなりません。このように、解析的な結果を還元するには保型形式の空間の基底を把握する必要があり、そのためには old form の空間の基底を考えることが不可欠なので、old form の空間の研究をします。

最後に、これらの研究を元にして類数などの整数論の興味対象を研究することとします。特に L 関数の零点に関する結果や特殊値に関する結果に結び付けることを考えます。

4. 研究成果

まず、保型形式の Fourier 係数に対して様々な視点での評価を得ることができました。現在では平均的な振る舞いに注目が集まっていますが、保型形式の重さやレベルがどう関わっているかについて注目するようになってきました。この時に、Fourier 係数の評価に保型形式の重さやレベルがどのように関係しているかという情報はとても重要になります。この点に注目しました。特に Symmetric square L 関数の特殊値は保型形式のノルムと関わる値になります。その値が保型形式の重さやレベルとどういうオーダーで関係するのは Fourier 係数の評価がどう関係しているかに関わります。それに関して良い評価を得ることができました。

次に、今まであまり old form に注目が集まることはありませんでしたが、primitive form に付随する L 関数を調べようとする場合、old form を無視するわけにはいきません。しかし、今まではあまり具体的に扱うことがされていませんでした。本研究では old form の空間を調べて、素数冪のレベルの場合に具体的な直交基底を構築することができました。その応用として、素数冪レベルの primitive form に付随する L 関数の non-vanishing に関して成果を得ることができました。

以上から保型形式のノルムという情報、primitive form に付随する L 関数の情報を以前より扱えるようになりました。更に L 関数の特殊値についてこれらの結果を応用していくことが目標になっていますが、現在方針を構築している段階で、まとまった成果として発表するには至っておりません。しかし、その研究に対して大きな前進をしたと言えます。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① Y. Ichihara, The first moment of L-functions of primitive forms on $\Gamma_0(p^\alpha)$ and a basis of old forms, Journal of Number Theory vol. 131, no. 2 (2011) 343-362. (査読有)

- ② Y. Ichihara, Non-vanishing of the value of L-functions attached to primitive forms at a fixed point on the critical line, 数理解析研究所講究録 1710 (2010) 29-41. (査読無)
- ③ Y. Ichihara, 保型 L 関数の non-vanishing theorem, 第二回数論女性の集まり報告集(2009) 1-5. (査読無)
- ④ Y. Ichihara, Siegel-Tatuzawa の定理について, 第一回数論女性の集まり報告集(2008) 1-9. (査読無)
- ⑤ Y. Ichihara, Estimates of a certain sum involving coefficients of cusp forms in weight and level aspects, Lithuanian Math. J. vol.48, no. 2 (2008) 188-202. (査読有)
- ⑥ Y. Ichihara and K. Matsumoto, On the Siegel-Tatuzawa theorem for a class of L-functions, Kyushu J. Math., vol.62 (2008), 201-215. (査読有)

[学会発表] (計 8 件)

- ① Y. Ichihara, 2010.3.19, The 15th. Joint Workshop on Number Theory between Japan and Taiwan (in Waseda University, Organizers : YU Jing (National Taiwan Univ.), KOMATSU Kei-ichi (Waseda Univ.), HASHIMOTO Ki-ichiro (Waseda Univ.), UMEGAKI Atsuki (WIAS), Non-vanishing of the automorphic L-functions at the point on the critical line.
- ② Y. Ichihara, 2009.10.14, 研究集会「解析整数およびその周辺の諸問題」(研究代表者: 津村博文), 京都大学数理解析研究所, Non-vanishing of the value of the L-functions attached to primitive forms on the critical line.
- ③ Y. Ichihara, 2009.9.24 (日本数学会, 大阪大学), Cusp form に付随する L 関数の $1/2+it$ における first moment
- ④ Y. Ichihara, 2009.6.27 CONFERENCE IN NUMBER THEORY (於 Carleton University, CANADA, Organizers : Saban Alaca, Gary Walsh, Kenneth Williams) The first moment of the value of automorphic L-functions over

primitive forms on the critical line.

- ⑤ Y. Ichihara, 2009. 5. 9, 研究集会「第二回数論女性の集まり」(於 早稲田大学, 世話人: 広中由美子, 太田香, 川内真由美, 市原由美子) 保型 L 関数の non-vanishing theorem.
- ⑥ Y. Ichihara, 2009. 2. 21 研究集会「第 2 回ゼータ若手研究集会」(於 名古屋大学, 代表者: 佐々木義卓) primitive form に対する保型 L 関数の critical line 上の点における first moment.
- ⑦ Y. Ichihara, 2008. 5. 17, 研究集会「第一回数論女性の集まり」(於 早稲田大学, 世話人: 広中由美子, 太田香, 大溪幸子, 市原由美子) Siegel-Tatuzawa の定理について
- ⑧ Y. Ichihara, 2008. 1. 8 French-Japanese Winter School on Zeta and L-functions (in Miura-kaigan, Organizers: K. Matsumoto and H. Tsumura), Estimates of a certain sum involving coefficients of cusp forms in weight and level aspects.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

市原由美子 (ICHIHARA YUMIKO)
奈良女子大学・理学部・准教授
研究者番号: 80372689