

平成 22 年 5 月 31 日現在

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2007 年度～2009 年度

課題番号：19740018

研究課題名（和文）有限群のブロックの導来同値分類について

研究課題名（英文）On a derived equivalence classification for blocks of finite groups

研究代表者

功刀 直子 (KUNUGI NAKO)

東京理科大学・理学部第一部・講師

研究者番号：50362306

研究成果の概要（和文）：有限群のモジュラー表現論における重要な問題の一つに、ブルエにより提出された可換不足群予想がある。与えられた群の可換不足群をもつブロックは、ブラウア一対応する  $p$  局所部分群のブロックに導来同値だろうという予想である。本研究では、可換不足群予想に関するいくつかの具体例を計算し、一般的な場合にどのように拡張できるかを考察した。また、安定同値の構成や安定同値での単純加群の対応を調べるために必要な、自明なソースをもつ加群について重要な結果を導き出した。

研究成果の概要（英文）：Broue's abelian defect group conjecture is one of the most important problems in modular representation theory of finite groups. The conjecture states that a block of a finite group with abelian defect group would be derived equivalent to its Brauer correspondent block. In this project, I calculated some examples for the conjecture and try to generalize such results. I also had some results for trivial source modules, which are important for constructing stable equivalences, calculating modules of images of simple modules under the stable equivalences.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,000,000	0	1,000,000
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	540,000	3,340,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：有限群，モジュラー表現，ブロック，森田同値，導来同値

## 1. 研究開始当初の背景

有限群のモジュラー表現における重要な問題のひとつに、ブルエによる可換不足群予想がある。これは、2つの有限群が同じ可換シ

ロー部分群をもち、 $p$ -局所構造が一致するとき、2つの群の主ブロックの間には導来圏の三角圏としての同値があるのではないか？というものである。導来同値であるような2つのブロックでは、表現論的な多くの情報が

保たれる。有限群が可換なシロー $p$ -部分群をもつとき、その群とシロー $p$ -部分群の正規化群の  $p$ -局所構造は一致し、ブルエの予想の設定となる。正規化群のブロックは一般にはわかりやすいので、予想が正しければ可換不足群をもつという条件のもとで、 $p$ -局所部分群の表現の情報から一般の有限群のブロックの情報を得ることが可能となり、とくに重要な予想と考えられている。この予想が正しいことは、巡回群を不足群にもつブロックについては一般的に確認されている。それ以外には、いくつかの具体例で確認されているが、一般的にはまだ多くのことがわかっていないのが現状である。

## 2. 研究の目的

導来同値は安定圏の同値を導くことが知られている。そこで、ブロック間の導来同値の研究、とくにブルエ予想の研究では、安定同値を構成することと、安定同値を導来同値へ持ち上げることの2つが大きな問題である。また、導来同値はパーフェクト・アイソメトリーと呼ばれる指標の対応を導くことも知られている。そのため、パーフェクト・アイソメトリーから導来同値を構成する方法の開発も必要となる。より具体的には、以下の内容に関わる研究をすすめることを目的とする。

(1) 不足群のランクに関する導来同値の帰納的な構成。とくに不足群が  $p$ -ランク 2 のブルエ予想の解決に向けた研究。

(2) パーフェクト・アイソメトリーについての研究。とくにパーフェクト・アイソメトリーの導来同値への持ち上げ。意味のあるパーフェクト・アイソメトリーを誘導する導来同値の構成についての研究。

(3) 非可換不足群をもつブロックにおける予想の定式化を目指した研究。

## 3. 研究の方法

(1) 安定同値での対応を決める際に重要となる自明なソースをもつ加群について、具体的な群に対して計算をし、データを蓄積する。さらに、それらをより一般的に成立するように拡張を試みる。とくに巡回群をバーテックスにもつ自明なソースを持つ加群について考察する。

(2)  $p$ -ランクが 2 の可換不足群をもつ具体的な群に対して、安定同値の構成、導来同値を構成し、データとして蓄積する。さらにそれを考察することで一般論を導き出す。

(3) 非可換不足群をもつブロックのパーフェクト・アイソメトリーや導来同値の構成を具体的な群に対して行う。

(4) スコット加群のブラウアー射による像を考察する。

## 4. 研究成果

以下のような研究成果を得ることができた。

(1) 巡回不足群をもつブロックの導来同値を構成したルキエの結果を用いて、巡回不足群をもつブロックにおいて、不足群をバーテックスにもつ自明なソースを持つ加群を記述した。これは越谷重夫との共同研究である。ランクが 2 の不足群をもつブロックにおける安定同値の像を計算するために役に立つ結果であり、実際、次に述べるヤンコの群での結果を得るために使われている。

(2)  $p$ -ランクが 2 の可換不足群をもつブロックについては越谷重夫、脇克志との共同研究により、 $p=3$  のときにヤンコ の群  $J_4$  に現れる可換不足群をもつブロックについて、安定同値を求め、さらにそれを導来同値に持ち上げることにより、ブルエ予想の成立を確かめた。

(3) 非可換不足群をもつブロックについては、指数  $p$  で巡回部分群をもつような非可換不足群をもつブロックとその局所部分群のブロックについて、指標の対応がパーフェクト・アイソメトリーになるための 2 つの条件のうちの一つが成立するような対応を構成した。これは、Miles Holloway、越谷重夫との共同研究である。また、具体的な場合に対しては、実際にパーフェクト・アイソメトリーが構成できること、さらに、それを導来同値に持ち上げることができる例を構成した。非可換不足群をもつブロックに対しては、これまでほとんど一般的な結果が得られていなかったため、とくに重要な結果であると考えられる。

以上(1) から(3) については、論文にまとめ、出版した。

(4) スコット加群のブラウアー対応の直既約性についての考察を行い、可換なバーテックスをもつ有限群のスコット加群がブラウアー直既約となるための必要十分条件は、そのバーデックス上の fusion system が saturated であるということを示した。これは、シロー部分群が可換であるとき、 $p$ -局所部分群の導来同値を用いて安定同値を構成する際に、それらがうまく張り合うことを保

障するために必要となる結果である。とくに可換不足群予想を証明する際に、役に立つ重要な結果であると考えられる。これは、Radha Kessar 三橋尚文との共同研究である。

(5) 有限体上の一般線型群のブロックの森田同値類分類について研究を行った。具体的には、表現を考える体の標数が群を定義する有限体の乗法群の位数を割る場合、さらにワイル群が巡回シロー部分群を持っているとき、2つの同じサイズの一般線型群の主ブロックは森田同値であるという結果を証明した。これは奥山哲郎、宮地兵衛との共同研究である。このような一般線型群の森田同値については、ドノバンによる予想にも関係して重要である。以前から多くの研究者に興味を持たれていたものでもある。部分的な結果であるが、非常に重要な結果と考えられる。

(4)(5) については、現在投稿論文を準備している段階である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

1. Shigeo Koshitani, Naoko Kunugi: Trivial source modules in blocks with cyclic defect group, 査読有, Mathematische Zeitschrift 2010年
2. Shigeo Koshitani, Naoko Kunugi, Miles Holloway: Blocks with nonabelian defect groups which have cyclic subgroups of index  $p$ , 査読有, Archiv der Mathematik, 2010年
3. Shigeo Koshitani, Naoko Kunugi, Katsushi Waki: Broue's Abelian defect group conjecture holds for the Janko simple group  $J_4$ , 査読有, Journal of Pure and Applied Algebra, 212巻, 2008年, 1438-1456.
4. Naoko Kunugi, Tomoyuki Wada: Eigenvalues of Cartan matrices of principal 2-blocks with abelian defect groups, 査読有, Journal of Algebra, 319巻, 2008年, 4404-4411.
5. 功刀直子 和田俱幸, 可換2-シロー部分群をもつ群における主ブロックのカルタン行列の固有値, 査読無 第25回代数的組合せ論シンポジウム報告集 2008年
6. 功刀直子, 有限群の表現論におけるブルエ予想, 査読無, 第53回代数学シンポジウム報告集, 2008年, 55-66
7. 功刀直子, Trivial source modules in blocks with cyclic defect groups, 査読無, 京都大学数理解析研究所講究録 1564巻, 52-57, 2007年

[学会発表] (計 12 件)

1. 功刀直子, Scott modules and equivalences between blocks of finite groups, アバディーン大学代数セミナー 2010年3月18日, アバディーン大学
2. 功刀直子, Morita equivalent blocks of general linear groups in non-defining characteristic, RIMS研究集会「代数的組合せ論および関連する群と代数」2009年11月20日, 信州大学
3. 功刀直子, 越谷重夫, 巡回不足群をもつ有限群のブロックにおける自明なソースをもつ加群, 日本数学会秋季総合分科会, 2009年9月 大阪大学
4. 功刀直子, 一般線型群の主ブロックの森田同値, RIMS研究集会「有限群のコホモロジー論とその周辺」2009年9月1日, 信州大学
5. 功刀直子, Morita equivalences for general linear groups in non-defining characteristic, RIMS研究集会「代数的三角圏とその周辺」2009年7月22日, 京都大学
6. 功刀直子, 越谷重夫, 脇克志: 有限群の表現論における離散的有限単純群  $J_4$  に対してのブルエ予想, 日本数学会秋季総合分科会, 2008年9月24日, 東京工業大学.
7. 功刀直子, 和田俱幸: Eigenvalues of Cartan matrices of principal 2-blocks with abelian defect groups, 日本数学会秋季総合分科会, 2008年9月24日, 東京工業大学.
8. 功刀直子, 有限群の表現論におけるブルエ予想, 第53回代数学シンポジウム, 2008年8月5日, いわて県民情報交流センター.
9. 功刀直子, 和田俱幸: 可換2-シロー部分群をもつ群における主ブロックのカルタン行列の固有値, 第25回代数的組合せ論シンポジウム, 2008年6月24日, 北海道大学.
10. 功刀直子: Derived equivalences for blocks with defect groups having cyclic subgroups of index  $p$ , UCSC Algebra Seminar, 2008年2月1日, University of California Santa Cruz.
11. 功刀直子: On Broue's abelian defect group conjecture in representation theory of finite groups, 第5回日・中・韓・環論国際シンポジウム, 2007年9月13日, 国立オリンピック記念青少年総合センター.

12. 功刀直子: Derived equivalences for blocks of finite groups having normal subgroups of index  $p$ , 有限群のコホモロジー論とその周辺, 2007年8月28日, 京都大学数理解析研究所.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

功刀 直子 (KUNUGI NAOKO)

東京理科大学・理学部第一部・講師

研究者番号 : 50362306