

研究種目：若手研究（B）  
 研究期間：2007～2010  
 課題番号：19740020  
 研究課題名（和文） 虚二次体上のアーベル拡大における岩澤理論と楕円単数  
 研究課題名（英文） Iwasawa theory for abelian extensions of imaginary quadratic fields and elliptic units

研究代表者  
 青木 美穂 (AOKI MIHO)  
 岡山理科大学・理学部・講師  
 研究者番号：10381451

研究分野： 数物系科学  
 科研費の分科・細目： 数学・代数学  
 キーワード： 数論

1. 研究計画の概要

整数論において、イデアル類群などの代数的対象とゼータ関数などの解析的对象を関連づける岩澤理論は、今日様々な方向へ一般化され、多くの研究者によって研究されている分野である。

本研究は、既に整備されつつあるアーベル数体における岩澤理論の諸結果を虚二次体上のアーベル拡大体を含めた一般の代数体に拡張することである。

また、岩澤理論に現れる様々な予想の相互関係についても研究する。

2. 研究の進捗状況

(1)  $p$  を奇素数、 $F_m$  を有理数体に1の  $p^{m+1}$  乗根を添加した体とする。また  $A_m$  を  $F_m$  のイデアル類群の  $p$  シロー部分群とする。  $F_{\infty} = \cup F_m$  に対し、cyclotomic 指標をガロア群の分解  $\text{Gal}(F_{\infty}/\mathbb{Q}) \cong \text{Gal}(F_0/\mathbb{Q}) \times \text{Gal}(F_{\infty}/F_0)$  に伴い、  $\omega \times \kappa$  と分解する。任意の整数  $m (\geq 0)$  と偶数  $j$  に対し、次のガロア加群としての完全列が存在することを示した。

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(X_{0,j}^{\wedge(m)}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)) \rightarrow A_m^{\wedge\{\omega^{1-j}\}} \rightarrow (U_m/I_m \quad U_m)^{\wedge\{\omega^{1-j}\}} \rightarrow (U_m/G_m)^{\wedge\{\omega^{1-j}\}} \rightarrow 0$$

ここで、  $\gamma$  を  $\text{Gal}(F_m/F_0)$  の位相的生成元とし、  $X_{0,j}^{\wedge(m)} = X^{\wedge\{j\}} / (\gamma^{\wedge\{p^m\}} - \kappa(\gamma^{\wedge\{p^m\}}))X^{\wedge\{j\}}$  は岩澤加群の商、  $U_m, I_m, G_m$  はそれぞれ  $F_m$  の局所単数群、Stickelberger イデアル、ガウス和の成す群である。また、この完全列の射影極限をとることにより、無限次における完全列も得られる。

(2)  $F$  を総実代数体とし、  $L$  を  $F$  上の有限

次アーベル拡大体、  $S$  を  $F$  の素点の有限集合で無限素点と  $L/F$  で分岐する素点を含むものとする。この設定の下、以下の2つの未解決予想がある。整数  $n \geq 0$  に対し、  $\Theta_S(n) = \sum_{\zeta \in \{F, S\}} (\sigma, -n) \sigma^{-1}$  とおく。

Brumer 予想  $\text{ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu_L) \Theta_S(0) \subseteq \text{ann}_{\mathbb{Z}[G]}(Cl_L)$ . ( $\mu_L$  は  $L$  に含まれる1の巾根全体.)

Coates-Sinnott 予想  $n \geq 1$  を整数とすると、  $\text{ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\text{tor}_{\mathbb{Z}}(K_{2n+1}(0_L))) \Theta_S(n) \subseteq \text{ann}_{\mathbb{Z}[G]}(K_{2n}(0_L))$ .

得られた結果は以下のとおりである。 $p$  を奇素数とする。以下の I~IV を仮定すると、Coates-Sinnott 予想の  $p$ -part は正しい。

- I. Quillen-Lichtenbaum 予想.
- II.  $S$  は  $p$  の上の素点を全て含む.
- III.  $L_m = L(\zeta_{p^{m+1}})$  とおくと、十分大きい  $m$  に対する拡大  $L_m/F$  での Brumer 予想.
- IV.  $p \nmid \prod_{\{v|p\}} w_n(L_v) \{w_n(L)\}$ . (体  $L$  に対し、  $w_n(L)$  は  $\text{Gal}(L(\zeta_N)/L)^{n=1}$  となる最大の整数  $N$  を表す.)

3. 現在までの達成度

代数体の整数環の  $K$  群に関する構造を調べる過程で、アーベル数体における代数的元と岩澤加群に関するある完全列の存在を示すことができた。これは、岩澤主予想の精密化になっていると考えられる。この結果を虚二次体上のアーベル拡大体を含め一般の代数体に拡張したいが、現在証明の途中である。また、岩澤理論に現れる予想で、特に Brumer 予想と Coates-Sinnott 予想との関係について結果を得ることができた。以上のことより、研究はおおむね順調に進展していると考えられる。

#### 4. 今後の研究の推進方策

昨年度までの研究の続きである, 代数体上のアーベル拡大における Brumer 予想と Coates-Sinnott 予想の関係について, 研究する. イデアル類群が Stickelberger 元で零化されると主張する Brumer 予想は, 整数環の  $K$  群が部分ゼータ関数の特殊値から作られる, ある元で零化されると主張する Coates-Sinnott 予想を導くということを考察していたが, その際に置いた仮定を取り除きたいと考えている.

また, 昨年度までに証明した, アーベル代数体における代数的元と岩澤加群に関する完全列の存在を一般の代数体に拡張する予定である.

#### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

① Miho Aoki, A note on the Coates-Sinnott conjecture, Bulletin of the London Mathematical Society, 41, 613-620, 2009, 査読有.

② Miho Aoki, On some exact sequences in the theory of cyclotomic fields, Journal of Algebra, 320, 4156-4177, 2008, 査読有.

③ 青木美穂,  $\mathbb{C}M$  体上の円分  $\mathbb{Z}_p$  拡大と高次  $K$  群について, 第 2 回福岡数論研究集会報告集, 67-78, 2007, 査読無.

[学会発表] (計 2 件)

① 青木美穂,  $K$ -groups of rings of algebraic integers and Iwasawa theory, 岩澤理論ミニ勉強会, 2009 年 4 月 2 日, 京都大学.

② 青木美穂,  $\mathbb{C}M$  体上の円分  $\mathbb{Z}_p$  拡大と高次  $K$  群について, 第 2 回福岡数論研究集会, 2007 年 8 月 29 日, 九州大学.