様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　23　年　4　月　28 日現在

機関番号：２２３０１
研究種目：若手研究（B）
研究期間：２００７　～　２０１０
課題番号：１９７４００２７
研究課題名（和文）　位相空間における１の分割の拡張問題の研究

研究課題名（英文）　A study of extension problems of partitions of unity on topological spaces

研究代表者
山﨑　薫里　（YAMAZAKI KAORI）
高崎経済大学・経済学部・准教授
研究者番号：８０３０１０７６

研究成果の概要（和文）：１の分割の拡張問題，特に，様々な性質をもつ１の分割の拡張を統一して扱うことが可能かという問題に対し，その概念を包括する拡張子の存在を研究した．特に，ノルム空間が反射的であるための必要十分条件をある種の拡張子が存在するという形で与え，1974 年に Heath-Lutzer が提出した問題を否定的に解決した．更に，線形閉凸拡張子と単調拡張子の存在問題に対し，終域の可分バナッハ束の振る舞いが異なることを示す定理を与えた．

研究成果の概要（英文）：On extension problems of partitions of unity, we study various extenders on topological spaces. In particular, we give a condition which characterizes a normed space to be reflexive by using linear closed convex extenders. This provides a negative answer to a question asked by Heath and Lutzer in 1974. Moreover, we give a theorem which shows variations between linear closed convex extenders and monotone extenders.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	900,000	0	900,000
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
２００９年度	800,000	240,000	1,040,000
２０１０年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,300,000	720,000	4,020,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：位相幾何，１の分割，連続関数の拡張，線形拡張子，拡張作用素，バナッハ束，挿入定理

１．研究開始当初の背景

(1)　１の分割の拡張問題とは，部分空間上の局所有限または点有限な和が１となる非負値連続関数族を，同様な性質を保存するような連続関数族に拡張可能かどうかを調べる問題である。本研究は，歴史的には，被覆次元とコホモロジカル次元を統一して議論するための道具

を開発する位置づけにある.

(2) 1 の分割の拡張の研究には，Dugundji の拡張定理等にみられるような部分空間上の関数族から全空間上の関数族への拡張子の研究が重要である.特に，Heath-Lutzer，van Douwen，Dydak 等により提出された関連する問題は，現在でも数多くが未解決のまま残されている.

２．研究の目的

(1) 様々な性質をもつ１の分割の拡張を統一して扱うことが可能かという問題に対し，一般の位相空間上の拡張子の存在とそれらの関係を調べる.

(2) Dugundji の拡張子が存在するような位相空間においては，１の分割の拡張問題への有効な手法が期待できると思われる．よって，より大きな範疇での Borsuk や Dugundji の拡張定理の改良，及び，集合値関数からの問題へのアプローチも行う.

３．研究の方法

(1) 具体的なバナッハ空間を反例の構成に用いることを試みる.

(2) １の分割の拡張問題を，Borsuk や Dugundji の拡張子の存在や，集合値関数の拡張や挿入理論への帰着させることを試みる.

(3) 拡張問題に関数解析や確率測度の拡張の手法を適用する.

(4) 反例の構成のために，特殊な状況を生み出すべく集合論の仮定を設定して問題解決を図る.

４．研究成果

(1) GO-空間 (generalized ordered 空間) 上で，実数値有界関数の線形閉凸値に関する拡張子が存在することが，R.W.Heath と D.J.Lutzer により，論文「Dugundji Extension theorems for linearly ordered spaces, Pacific J. Math. 55 (1974) 419-164」において発表された．Heath と Lutzer はこの論文において，実数値で得られた拡張子の結果について，局所凸線形位相空間を値にとる形に拡張できるかどうかということを問題として提出していた．研究代表者は，マイケル直線上ではバナッハ空間 l_1 への拡張子が存在しないということを示し，この Heath と Lutzer の問題に対して否定解を与えた．本結果を，2007 年 12 月に京都大学で行われた International Conference on Topology and its Applications 2007 at Kyoto において講演した．本講演後，この結果を改良すべく，Iryna Banakh 氏と Taras Banakh 氏との共同研究を行い，以下のように発展させることができた.「定理：ノルム空間 Y に対し，ノルム空間 Y が反射的であるための必要十分条件は，任意の GO-空間 X とその閉部分空間 A に対して線形閉凸拡張子 $u:C_\infty(A,Y)\to C_\infty(X,Y)$ が存在することである.」ここで，$C_\infty(X,Y)$ は X から Y への有界連続関数を表す．すなわち，Heath と Lutzer の問題は，反射的バナッハ空間では常に肯定的で，反射的でないバナッハ空間では常に否定的という，バナッハ空間の反射性を特徴付ける強い形で完全に解決できることを証明した。本研究結果は，線形拡張子と一般の拡張子の関連を与える研究にも応用が期待できる.

(2) Iryna Banakh 氏と Taras Banakh 氏との共同研究において，拡張子における制約である「閉凸拡張子」が「単調拡張子」に一般化できるかどうか，可分バナッハ空間 c を値にとる場合に関しては未解決であるということを問題として提出していた．背景として，類似する問題が，可分バナッハ空間 c_0 では否定的，l_1 では肯定的ということが知られており，c での肯定・否定の結果を知ることが拡張子の存在問題の本質を突きとめるカギであった．この問題に関して，バナッハ空間 c を値にとる有界関数族の単調拡張子が GO-空間において存在しないことを，このような拡張子の存在から定義域空間がある種の Choquet ゲームの性質をもつことを導いて証明し，上述の I.Banakh-T.Banakh-山﨑の問題に否定解を与えた．以上の結果は，バナッハ空間の濃度が同じであっても拡張子の終域として同じ振る舞いをするとは限らないということを示すものであり，van Douwen 等にみられる拡張子のノルムの保存の問題への発展を示唆している．

(3) 1 の分割のような連続関数族の拡張を扱う場合に，集合値関数の拡張や挿入の手法に帰着できる可能性がある．この視点から，実数への半連続関数を位相ベクトル束への半連続関数に拡張する場合の基本定理を与えた．応用として，位相ベクトル束を値にとる 2 つの半連続関数の作る集合値関数と集合値関数の上限が作る半連続関数についての双対定理を与え，バナッハ束への挿入定理に応用できることを示した．この結果は，Valentin Gutev 氏と大田春外氏との共同研究で 2003 年に得られていたある種のバナッハ束への定理を，位相ベクトル束に拡張できることを示すものである．van Douwen 等の未解決問題に対し，反例を作るために期待される道具であるといえる．

(4) 実数値関数で与えられる挿入定理を（自明でない）可分なバナッハ束を値にとる形に置き換えられるかという問題に対し，3 つの古典的な挿入定理の終域に着目した以下の定理を与えた．「定理：Dowker-Katetov の挿入定理における終域 R（＝実数空間）は，任意の自明でない可分なバナッハ束に置き換えることができる．Michael の挿入定理でも同様なことが成立するが，Katetov-Tong の挿入定理では成立しない.」この定理は，拡張問題における関数の終域の構造にどのような情報を必要とするかという問題に示唆を与えるものであり，挿入定理の終域のテスト空間としてどのようなバナッハ束がふさわしいかという新たな研究方向を提示している．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　7 件）

① Kaori Yamazaki, The range of maps on classical insertion theorems, Acta Mathematica Hungarica, 掲載決定，査読有．

② 山﨑薫里，数列空間 c への有界関数族に対する単調拡張子の存在について，一般

位相幾何学及び幾何学的トポロジーの最近の話題とその応用，京都大学数理解析研究所講究録，1728 (2011)，67-71，査読無.

③ Kaori Yamazaki, Monotone extenders for bounded c-valued functions, Studia Mathematica, 199 (2010), 17-22, 査読有.

④ Kaori Yamazaki, Insertion theorems for maps to Banach lattices, Topology and its Applications, 157 (2010), 1955-1965, 査読有.

⑤ 山崎薫里, Semicontinuous maps to topological vector lattices and their applications, 一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーに関する研究，京都大学数理解析研究所講究録，1681 (2010)，65-72，査読無.

⑥ Iryna Banakh, Taras Banakh, Kaori Yamazaki, Extenders for vector-valued functions, Studia Mathematica, 191 (2009), 123-150, 査読有.

⑦ Iryna Banakh, Taras Banakh, Kaori Yamazaki, 線形拡張子を用いた反射的バナッハ空間の特徴づけ，一般・幾何学的トポロジーの研究動向と諸問題，京都大学数理解析研究所講究録，1634 (2009)，35-40，査読無.

〔学会発表〕(計 7 件)

① 山崎薫里，数列空間 c への有界関数族に対する単調拡張子の存在について，一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーの最近の話題とその応用，2010.10.14，京都大学数理解析研究所.

② 山崎薫里, Semicontinuous maps to topological vector lattices and their applications, 一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーに関する研究，2009.10.16，京都大学楽友会館.

③ 山崎薫里，反射的バナッハ空間の拡張子による特徴づけ，つくばセミナー，2009 年 3 月 11 日，筑波大学.

④ Iryna Banakh, Taras Banakh, Kaori Yamazaki，線形拡張子を用いた反射的バナッハ空間の特徴づけ，一般・幾何学的トポロジーの研究動向と諸問題，2008 年 10 月 8 日，京都大学数理解析研究所.

⑤ Kaori Yamazaki, Extenders for vector-valued functions, Advances in Set-Theoretic Topology, 2008 年 6 月 13 日, Erice, Italy.

⑥ Kaori Yamazaki, Simultaneous extenders for bounded functions, International Conference on Topology and its Applications 2007 at Kyoto, 2007 年 12 月 7 日，京都大学数理解析研究所および理学部数学科.

⑦ 山崎薫里，Dugungji の拡張定理とその周辺，バナッハ環セミナー，2007 年 11 月 22 日，筑波大学.

６．研究組織

(1)研究代表者

山崎 薫里 (YAMAZAKI KAORI)
高崎経済大学・経済学部・准教授
研究者番号：80301076

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし