

機関番号：13601

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007～2010

課題番号：19740031

研究課題名（和文）

高次元トポロジーと低次元トポロジーの境界領域にある幾何

研究課題名（英文）

Geometry in the interface between high- and low-dimensional Topology

研究代表者

高瀬将道（TAKASE MASAMICHI）

信州大学・理学部・准教授

研究者番号：30447718

研究成果の概要（和文）：

6次元球面に埋め込まれた3次元球面がすべて、1989年にデニス・ローズマンによって導入された部分多様体に沿うスピニングという操作で構成できることを示した。また、このような6次元球面に埋め込まれた3次元球面に対して定義されるある種のHopf不変量の取りうる値の考察を行った。さらに、3次元球面から4次元空間へのはめ込みに対して、そのボルディズム類をジェネリック写像による拡張に現れる特異点の幾何的情報から読み取る公式を与えた。

研究成果の概要（英文）：

We show that any 3-sphere embedded in the 6-sphere can be obtained by performing the operation called spinning about submanifold, introduced by Dennis Roseman in 1989. Also, we analyze the possible values of a certain Hopf invariant, which is defined for such a 3-sphere embedded in the 6-sphere. And also, for a given immersion of the 3-sphere into the 4-space, we give a formula with which we can read off its bordism class from some geometric information on singularities of its extension by a generic map.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	0	1,000,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総計	3,300,000	690,000	3,990,000

研究代表者の専門分野：微分位相幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：低次元トポロジー，微分可能写像，特異点，高次元結び目，埋め込み，はめ込み

1. 研究開始当初の背景

低次元トポロジーにおいては、例えば3次元トポロジーにおける Dehn 手術や4次元トポロジーにおける Kirby 計算など、次元ごとの個性に応じて様々な幾何的道具が発達しており、構成的な発見が重視される。一方で高次元トポロジーにおいては、例えば h-コボルディズム定理やより一般的な手術理論のように次元に関わらず適用可能な代数的手法が発達しているが、時に幾何的直感に乏しい。低次元トポロジーと高次元トポロジーは相互に影響しながら発達してきたはずであるが、近年はその間には「壁」があるような印象がある。特に多様体間の微分可能写像をキーワードにして、この壁を跨ぐ研究を行うことは意義が深いと思われる。すなわち、代数的な飛び道具を武器に発達してきた高次元トポロジーに、低次元トポロジー的な手作りの道具を持ち込み、幾何的な理解を深めようとする研究はこれまであまりなかったのである。

2. 研究の目的

多様体間の微分可能写像を用いて多様体のトポロジーについて研究することを目的とする。具体的には、代数的トポロジーに帰着し完成されたとされる埋め込み・はめ込み理論において各次元・各写像に固有の幾何を探ることにより代数的トポロジーの幾何的な意味を明らかにすることや、低次元多様体の高次元多様体への埋め込み・はめ込みを扱うことにより高次元トポロジーと低次元トポロジーを結びつけることなどを目的とする。

以下にもう少し具体的に述べる。多様体間のはめ込みの分類問題は、Smale-Hirsch 理論によって代数的トポロジーに帰着され、解決した。しかしながら、与えられたはめ込みがその分類のどのクラスに属するのかといった幾何的な問題は必ずしも Smale-Hirsch 理論からすぐに答えが分かるわけではない。分かり易い幾何的不変量を探す試みは今までそれほど熱心に研究されてきていないのである。これは低次元トポロジー（例えば古典的結び目理論等で）で一般的な問題意識からすると少し違和感があり（順序が逆）、やはり興味深い問題と言わざるをえない。同様なことは埋め込みの問題にもあり、Haefliger の理論あるいは手術理論によって、埋め込みの分類問題の多くは解決されているが、幾何的な理解が充分であるとは必ずしも言えない。このギャップを埋めていくことを目的としているのである。これは高次元トポロジー

の手法によって組み立てられている埋め込み・はめ込み理論の一般論に、低次元トポロジー的な観点を導入するというような言い方もできる。

3. 研究の方法

(1) 同時に考える問題を時期ごとに絞って集中して考えた。絞った問題ごとに、結果が得られたら、それを論文にまとめ、研究集会で発表するというスタイルを目指した。

(2) 必ずしも直接に研究課題に結びつかないように見えても、新しい着想を得るために多くの研究集会に参加して食欲にヒントを探した。同じ理由でなるべく幅広い分野の研究者と交流を持つようにした。

(3) 得られた成果は英文の論文にまとめ、海外の由緒ある査読誌に投稿するように心がけた。また、特に国内の研究集会でも詳しく講演するように努力した。

4. 研究成果

(1) $6k$ 次元球面 S^{6k} 内に埋め込まれた $(4k-1)$ 次元球面 S^{4k-1} に、ある種のスパン結び目の構造が入ることを明らかにした。すなわち、Haefliger によって発見された $6k$ 次元球面の中の $(4k-1)$ 次元の滑らかな結び目はすべて、 $(4k-1)$ 次元球面 S^{4k-1} 内に標準的に埋め込まれた $S^{2k-1} \times S^{2k-1}$ に沿った「spinning about a submanifold」という操作によって得られることを証明した。具体的には、 $S^{2k-1} \times S^{2k-1}$ の各点においてその S^{4k-1} 内での 1 次元法円盤を S^{6k} 内での $(2k+2)$ 次元法円盤内で「捻っていく」という操作によって、 S^{6k} 内に埋め込まれた任意の $(4k-1)$ 次元球面 S^{4k-1} が得られるということである。

(2) さらに引き続いて執筆した論文では、 $6k$ 次元球面 S^{6k} 内に埋め込まれた $(4k-1)$ 次元球面 S^{4k-1} に関して、他にもいくつかの結果を得た。例えば、この状況で定義されるある種の Hopf 不変量の取りうるねの考察や穴を一回開けた 4 次元多様体の 6 次元空間への埋め込み可能性の問題の考察などである。

(3)

3次元多様体の4次元空間へのはめ込みのコボルディズム類を特異 Seifert 膜の言葉で記述する公式を導いた。すなわち、与えられたはめ込みを拡張する4次元多様体からのジェネリック写像の(4次元多様体の)指数、写像の臍型特異点の個数によって、はめ込みのコボルディズム類が読み取れることを可能にする公式を書き下した。特別な場合に Thom 多項式の相対バージョンを得ていると見る観点もある。

(4)

具体的に記述された、3次元球面の4次元空間へのあるはめ込みの正則ホモトピー類とボルディズム類を、特異 Seifert 膜を用いて計算した。ある写像芽の versal unfolding を利用した、特異 Seifert 膜の具体的な構成に工夫がある。さらに結果的に、球面の3次元安定ホモトピー群の生成元にはめ込みによる新しい記述を与えることに成功した。さらに Tobias Ekholm 氏との共同研究に発展させ、より広い族のはめ込みに対して結果を拡張した。この結果はその後学術雑誌に受理された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

①

Tobias Ekholm and Masamichi Takase,
Singular Seifert surfaces and Smale invariants for a family of 3-sphere immersions,
Bulletin of the London Mathematical Society,
査読有,
43 (2011) 251-266

②

Dennis Roseman and Masamichi Takase,
High-codimensional knots spun about manifolds,
Algebraic and Geometric Topology,
査読有,
7 (2007) 359-377.

③

Masamichi Takase,
An Ekholm-Szűcs-type formula for codimension one immersions of 3-manifolds up to bordism,
Bulletin of the London Mathematical Society,
査読有,
39 (2007) 39-45.

④

Masamichi Takase,
The Hopf invariant of a Haefliger knot,
Mathematische Zeitschrift,
査読有,
256 (2007) 35-44.

[学会発表] (計6件)

①

特異ザイフェルト膜の具体的な構成について、北海道大学幾何学コロキウム、北海道大学理学部、2009年11月13日 16:45~18:00.

②

球面の3次元安定ホモトピー群の余次元1はめ込みによる記述、ホモトピー論シンポジウム、姫路市民会館、2009年10月31日 14:30~15:20.

③

ミルナーのはめ込みが表すコボルディズム類について、近畿大学数学教室講演会、近畿大学理工学部、2008年11月13日 16:30~17:30.

④

高余次元結び目のスピニング、同相群とその周辺、京都産業大学、2008年2月18日 13:30~14:30.

⑤

高余次元結び目のホップ不変量、ホモトピー論シンポジウム、金沢歌劇座、2007年11月15日 13:40~14:30.

⑥

大域的特異点論の問題3題、大域的特異点論の問題——安藤良文先生還暦記念研究集会、近畿大学、2007年10月5日 10:00~10:40.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高瀬 将道 (TAKASE MASAMICHI)

信州大学・理学部・准教授

研究者番号 : 30447718

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :