

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目： 若手研究 (B)
 研究期間： 2007 年度 ~ 2008 年度
 課題番号： 19740035

研究課題名 (和文) 結び目の多項式不変量に関連した理論

研究課題名 (英文) polynomial invariants of knots and related theory

研究代表者 Stoimenow, Alexander
 (ストイメノブ アレクサンダー)

研究者番号： 60444452

研究成果の概要：

15 以上の各奇数交点数での achiral な結び目の構成を完成した。
 「行列—不・量—対数は‘曲体’で直的に近‘される」という予想を—々‘きに 証明した。
 Burau と Lawrence-Krammer 表現の稠密性, 非自明な Jones
 多項式の問題と幾何的な性質を持つ閉じた 3 次組み紐についても研究を行った。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	600000	0	600000
2008 年度	700000	210000	910000
年度			
年度			
年度			
総計	1300000	210000	1510000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：braid group, archiral knot, Hecke algebra, link polynomial

1. 研究開始当初の背景

(1) 結び目の量子群によって得られた不・量—幾何的な性質の“係が近年の重要な 研究テーマである。

(2) achiral な結び目の交点数は既に最初の

表を編集した Tait 氏に 1880 年頃聞かれた古典的な問題である。

(3) 組紐群の表現が結び目不・量—構成と他々様々な関のため—研究されている。Burau 表現は約 90 年前から知られ, 最も簡単な自明でない表現として, ‘紐’の表現論の—基本としてい’,

Lawrence-Krammer 表現が約 10 前から忠実な表現として、特別な意味がある。

Jones 多項式は Jones-Ocneanu の方法により組み紐群の表現のトレースの和として定義され、多項式の非自明性は Hecke 代数にも関係がある。この表現の中に Burau 表現が現れる。Burau 表現は本数 3 の組み紐に対して忠実であることが以前から知られている一方、本数 5 以上に対する表現の非忠実性は比較的最近に Bigelow により示された。それで、本数 4 の場合だけが未解決である。この問題は 4 次組み紐の閉包の中に自明な Jones 多項式を持つものが存在するかどうかという問題と同様である。

(4) 1985 年に Jones は、彼の名に因んで呼ばれる結び目多項式不変量—発見し”その多項式は自明な結び目を各非自明な結び目から区別できるかどうかという問題を提起した。

最近、2 以上の成分(component)を持つ絡み目に対する非自明性の問題は否定的に解決されたが、Jones の元の (結び目についての) 問題への答えは不変である。

(5) 閉じた 3 次組み紐はよく研究されていてクラスである。Birman-Menasco による分類結果にかかわらず、「いつ閉じ・3 次組み紐がある幾何的な性質をもつか」というような質問が難しい。;

2 . 研究の目的

(1) Lackenby-Agol-Thurston の「twist

数」という不変量—使う不変式を用いて交代絡み目に関する「行列—不変量—対数は‘曲体’で直的に近‘される」という予想である。

(2) 15 以上の各奇数交点数での achiral な結び目の構成である。

(3) それぞれ Squier と Budney が(表現をさだめる変数が絶対値 1 の複‘数で”るとき Burau と Lawrence-Krammer 表現の行列に保たれる形式を発見した。形式が definite である時、 ρ の Image が unitary になる (行列群の $U(n)$ の部分群に含まれている)。Burau と Lawrence-Krammer 表現の Image が変数の値によって unitary 群の中に含まれている時、Image が unitary 群の中に稠密になるという性質の証明が研究の目的である。

(4) 研究の目的が Jones 多項式の非自明性の証明である。

(5) 研究の目的が幾何的な性質を持つ閉じた 3 次組み紐の分類である。

3 . 研究の方法

(1) 組み合わせ理論 (平面に埋め込み graph の解析) をもちいる。

(2) 応募者の Jones 多項式の非自明性についての研究に用いた手段(以下(5)を参照) をもちいる。

(3) 主な道具は Lie 群論 , “に Dynkin による semisimple Lie 群の最大部分群の類別 , である。

(4) Jones 多項式の Kauffman 括弧式のモ

デル(Kauffman state model) を詳しく解析することによる。

(5) 幾何的な手段 (Gabai による disk 分解) 組合せ (Kauffman 括弧式のモデル) と代数 (Hecke 代数表現による多項式不・量—構成) でやる。

4. 研究成果

(1) 15 以上の各奇数交点数での achiral な結び目の構成が完成された。

(2) 上述の予想を厳格てきに証明した。

(3) Burau と Lawrence-Krammer 表現の Image が変数の値によって unitary 群の中に含まれている時, Image が unitary 群の中に稠密になるという性質を証明し, 絡み目の組紐表現にもちいた。(一部は吉野太郎氏との共同研究)†

(4) 従来から知られていた交代絡み目と正絡み目の条件の一般化として、Lickorish-Thistlethwaite により定義された semiadequate 絡み目の Jones 多項式の非自明性を証明した。そして、閉じた 3 次組み紐絡み目と Montesinos 絡み目が semiadequate 性を持つことを示すとともに、それらのクラスの絡み目に対して Jones 多項式の非自明性を示すことができた。

(5) 私は交代性や閉じた正組み紐やファイバー性などの特別な性質を持つ閉じた 3 次組み紐の結び目と絡み目を分類し、閉じた 3 次組み紐に対して Jones 多項式は非自明

である事を示した。

この非自明な Jones 多項式の問題への貢献の他に、指された Conway/Alexander や Jones や HOMFLY 多項式を持つ結び目を決定する方法を示した。さらに、平澤美可・氏と平(旧石渡)万希子氏との共同研究で Birman-Menasco と Bennequin による結果を一般化し、各閉じた 3 次組み紐絡み目は非圧縮曲面を一つしか持たないことを証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

Stoimenow A., Bennequin's inequality and the positivity of the signature. Trans. Amer. Math. Soc. (査読有), 360(10) (2008 年), 5173—5199

Stoimenow A., Tait's conjectures and odd crossing number amphicheiral knots. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) (査読有), 45(2) (2008 年), 285--291.

Stoimenow A., Generating functions, Fibonacci numbers and rational knots, J. Algebra (査読有), 310(2) (2007 年), 491—525

Stoimenow A., Square numbers and polynomial invariants of archiral knots, Math. Z. (査読有), 255(4) (2007 年), 703—719

Stoimenow A., On cabled knots and Vassiliev invariants (not) contained in

knot polynomials, *Canad. J. Math.*,
(査読有), 59(2) (2007 年), 418—448

Stoimenow A, Graphs, determinants of
knots and hyperbolic volume. *Pacific J.
Math.* (査読有), 232(2) (2007 年),
423--451.

[学会発表](計 2件)

学会名 : The Fifth East Asia School of
Knots and Related Topics ,
2009 年 1 月 1 2 - 1 6 日 , 慶州 , 韓国 発
表者 : Stoimenow A,

発表標題 : Lie groups,
Burau representation, and
non-conjugate braids with the same
closure link

学会名 : The First Topology Workshop
KAIST,
2008 年 8 月 1 2 - 1 4 日 , ‘田“韓国 発表
者 : Stoimenow A,

発表標題 : Lie groups,
Burau representation, and
non-conjugate braids with the same
closure link

[その他]

ホームページ等

<http://mathsci.kaist.ac.kr/~stoimeno/>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

大阪市立大学・大学院理学研究科・
博士研究員 Stoimenow Alexander

(ストイメノブ アレクサンダー)

研究者番号 : 60444452

(2)研究分担者
(なし)

研究者番号 :
(3)連携研究者
(なし)

研究者番号 :