様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年 5 月 19 日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2007～2009
課題番号：19740043
研究課題名（和文）　非Ｍａｒｋｏｖ場への応用に向けた無限次元確率解析の展開

研究課題名（和文）　Development of infinite-dimensional stochastic analysis for applications to non-Markovian fields

研究代表者
針谷　祐　(HARIYA YUU)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：20404030

研究成果の概要（和文）：(1) 研究代表者による Wiener 空間上のあるタイプの発散公式と，領域変形下での熱核の変分を記述する Hadamard の変分公式とを結ぶ，Brown 運動の経路分解を見出した.
(2) 放物型方程式の基本解の長時間挙動に関連し，1 次元かつ方程式のポテンシャルがある可積分性条件をみたす場合に,研究代表者が 2006 年に考案した時間変更の手法を用いることによって 3 次元 Bessel 過程による確率論的な説明を与えた.

研究成果の概要（英文）：(1) I have found a path decomposition of multi-dimensional Brownian motion that relates a type of divergence formula on Wiener space obtained by myself, and Hadamard's variational formula for heat kernels of parabolic equations with Dirichlet boundary conditions.
(2) Concerning long-time asymptotics of heat kernels for parabolic equations, I have given a probabilistic explanation by means of a time-change argument which I developed in 2006, in the case where the dimension is one and associated potentials satisfy a certain integrability condition.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,000,000	0	1,000,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,200,000	660,000	3,860,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：確率論

１．研究開始当初の背景
　これまでの確率論は主として Markov 過程，すなわち Markov 性を持つ確率過程，の研究を中心に発展して来た．Markov 性とは，例えば空間内を運動する粒子の将来の動きが，それまでにこの粒子がどのような経路を辿ったかといった過去の履歴に依らないという性質である．確率論とポテンシャル論との

関係においてもMarkov性は不可分であるし，また，Brown 運動を経路空間に実現したWiener 空間と呼ばれる無限次元空間上の微積分の理論であるMalliavin解析も，元々は確率微分方程式の解として与えられるMarkov 過程の分布の滑らかさを調べるという動機にその端を発したのであった．

一方，統計力学や生物現象から提起されるモデルには Markov 性を持ち得ないものが多々あり，例えば水の染み込みや病気の伝播等のモデルである percolation や，random walk を自己交差しないよう条件付けたself-avoiding（自己回避的）random walk等がその典型である．これらのモデルの解析にはある種の単調性や凸性に依った独自の議論が用いられ，従ってこのような枠組みから大きく逸脱するモデルに対しては解析が困難な状況であった．ところが，研究開始の数年前に，ある percolation のモデルや2次元格子上の self-avoiding random walk をある無限次元空間（正確には等角写像全体が成す空間）上に拡張することにより Markov 性を獲得することが発見され([1]参照)，それによってこれまで発展して来た Markov 過程の理論を用いることによりこれらのモデルのより詳しい解析が可能となった．このような,値を取る空間を無限次元空間(あるいはより高次の空間)に埋め込むことによりMarkov性を獲得出来る例は場の量子論においても存在する([2]参照)．これらのことから，今後無限次元確率解析の重要性がより一層増すであろうと考え本研究を開始した．

[1] G.F. Lawler, Conformally Invariant Processes in the Plane, Amer. Math. Soc. (2005).
[2] V. Betz, J. Lorinzci, H. Spohn, Gibbs measures on Brownian paths: theory and applications, Interacting stochastic systems, 75--102, Springer (2005).

２．研究の目的

本研究の目的は，上記のような統計力学や場の量子論において数多く現れる Markov 性を持たないモデルへの応用を念頭に，従来の無限次元確率解析の枠組みを拡張することであった．無限次元解析の白眉としてMalliavin 解析が挙げられるが，この理論は元来，上述したように確率微分方程式の解として与えられるWiener汎関数（つまりBrown運動の汎関数）の分布の滑らかさを調べることに端を発したため，そのような形で与えられない汎関数，例えば確率論において基本的な概念である，与えられた領域からの脱出時刻といった停止時刻や，それに付随する最大値汎関数(その領域を level set に持つ関数にBrown運動を代入して得られる確率過程のある時刻までの最大値)は Malliavin の意味での微分可能性が低いまたは無いため，従来の枠組みでは非常に扱いづらいものとなっているのが現状である．

３．研究の方法

Wiener 空間上の発散公式についてより考察を進めた．また，Wiener測度に対するいわゆる処罰問題に関する考察を行った．具体的には主として次の3項目について研究を行った．

(1) 研究代表者は，2006 年の研究において，Wiener 空間の部分集合として経路の各時点での値が常に Euclid 空間内のある有界領域内に留まるものを考え，Malliavin の部分積分公式をその部分集合上に制限すれば，有限次元におけるGaussの発散公式と同様にその部分集合の境界からの寄与と呼ぶべき項が現れ，Euclid空間内の領域の境界に十分な滑らかさを仮定すれば，対応するDirichlet境界条件付き放物型方程式の基本解の法線微分を用いてその項が具体的に表されることを見出した([1])．しかし，その表現の導出は直接的な計算に依っており，その背景にあるもの，例えば，領域変形の下での基本解の変分を記述する Hadamard の変分公式([2]参照)の表現との類似性が生じる理由，は明らかではなかった．研究代表者は，上記の設定の下での無限次元発散公式と Hadamard の変分公式とはともに，等高面を用いたBrown運動のある経路分解からの帰結として統一的に捉えられることを見出した．

(2) (1)で述べた経路分解の成立には，Brown運動をその等高面を実現する関数に代入して得られる確率過程の最大値として表現されるWiener汎関数が，Lebesgue測度に対して連続な密度関数を持つか否かが大きく関わる．ところが一般に最大値のような汎関数は1階の微分可能性しか持たず，そのため従来のMalliavin解析の枠組みでは密度関数の存在までしか得られない．その欠点を克服するために Florit-Nualart により局所非退化の概念が導入され([3])，例えば最も単純な1次元Brown運動の最大値汎関数についてはこの枠組みで捉えることが可能であり，無限回微分可能な密度関数の存在を（その具体的表示に依らず）導くことが可能となる．そこで，上述のような最大値汎関数についても局所非退化，あるいはその一般化の枠組みで扱うことが出来るか調べた．なお，経路分解を用いて上述のタイプの発散公式を導出することは，このような十分な滑らかさを持たない（なおかつ値をある部分領域でしか取らない）Wiener汎関数とDiracのデルタ関数との合成を考えるという従来のMalliavin解析では想定されていないものに対応することに注意されたい（従って，この種の発散公式の

成立は，この合成が正当化されることも示唆していると考えられる).
(3) Roynette, Vallois, Yor らにより提唱された, Wiener 測度に対する Feynman-Kac 型の処罰問題に関する研究を行った. Wiener 測度に対する処罰問題とは, Wiener 測度(Brown 運動が経路空間上に誘導する確率測度)に重み過程と呼ばれる非負の確率過程を掛けて正規化し，それにより得られる確率測度の列についてその長時間極限の存在および特徴付けを問う問題である. 非 Markov 的な対象物であり構成論的場の量子論や高分子鎖の理論において重要な意味を持つ「自己回避的な Brown 経路」の構成を念頭に Varadhan や Westwater らにより研究され(例えば[4],[5]参照)，その結果得られた経路空間上の確率測度の族の長時間極限を議論するための先ずはそのテストケースとして, Wiener 測度に対する処罰問題は上記の 3 氏により提起された([6],[7]他).

[1] Y. Hariya, Integration by parts formulae for Wiener measures restricted to subsets in R^d, J. Funct. Anal. 239, 594--610 (2006).
[2] S. Ozawa, Hadamard's variation of the Green kernels of heat equations and their traces. I, J. Math. Soc. Japan 34, 455--473, (1982).
[3] C. Florit and D. Nualart, A local criterion for smoothness of densities and application to the supremum of the Brownian sheet, Statist. Probab. Lett. 22, 25--31 (1995).
[4] J. Westwater, On Edwards model for long polymer chains, Comm. Math. Phys. 72, 131--174 (1980).
[5] J. Westwater, On Edwards model for long polymer chains, II. The self-consistent potential, Comm. Math. Phys. 79, 53--73 (1981).
[6] B. Roynette, P. Vallois, M. Yor, Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by normalized exponential weights, I, Studia Sci., Math., Hungar. 43, 171--246 (2006).
[7] B. Roynette, M. Yor, Penalising Brownian Paths, volume 1969 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin (2009).

４．研究成果

(1) 上述の Wiener 空間上の発散公式と Hadamard の変分公式を結ぶ, 等高面を用いた Brown 運動の経路分解を見出した. この結果, 二つの公式は，この経路分解を通じて統一的に捉えられる(すなわち経路分解からいずれの公式も導ける)ことが分かった.
(2) Wiener 測度に対する Feynman-Kac 型の処罰問題に関連し，この種の処罰問題を解く上で重要となる，付随する放物型方程式の基本解の長時間漸近挙動に関する村田實氏による 1985 年の結果([1])について特に 1 次元かつ方程式のポテンシャルがある可積分性条件をみたす場合に，研究代表者が 2006 年に考案した時間変更の手法([2])を用いることによって 3 次元 Bessel 過程による確率論的な説明を与え，その結果を論文にまとめた. なお，その漸近挙動の導出において，[1]で仮定されていたポテンシャルが無限遠において 3 次より真に大きい多項式のオーダーで減衰するという条件は，正の無限遠または負の無限遠いずれか一方での減衰のみの条件に緩めることが出来る.

[1] M. Murata, Large time asymptotics for fundamental solutions of diffusion equations, Tohoku Math. J. 37, 151--195 (1985).
[2] Y. Hariya, A time-change approach to Kotani's extension of Yor's formula, J. Math. Soc. Japan 58, 129--151 (2006).

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）

〔学会発表〕（計０件）

〔図書〕（計０件）
〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者

針谷　祐（HARIYA YUU）
東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：20404030

(2)研究分担者

（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　）

研究者番号：