

平成 22 年 5 月 17 日現在

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2007 ~ 2009

課題番号：19740044

研究課題名 (和文) 可積分系の手法を用いた 1 次元無限粒子系の研究

研究課題名 (英文) Studies of one dimensional interacting particle systems using the methods of integrable systems.

研究代表者

笹本 智弘 (SASAMOTO TOMOHIRO)

千葉大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：70332640

研究成果の概要 (和文)：

主として 1 次元確率的界面成長モデルの揺らぎの性質について理解を深めた。まず多核成長モデルと呼ばれるモデルに対し、平坦な初期条件の場合の揺らぎを同定し、その漸近的な振る舞いも調べた。また KPZ 方程式と呼ばれるモデルに対し、カギ型初期条件の場合の揺らぎを同定し、その振る舞いを調べた。さらに時間依存ランダム行列に関する新たな恒等式を見出した。

研究成果の概要 (英文)：

We have deepened the understanding of the fluctuation properties of one-dimensional surface growth models. For the polynuclear growth model with flat initial condition, we have identified the fluctuations and discussed its asymptotics. We have also obtained a formula for the fluctuations of the KPZ equation with wedge initial conditions. We have also found a formula of a relation between two time dependent random matrix ensembles.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,000,000	0	1,000,000
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	630,000	3,730,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：確率論

1. 研究開始当初の背景

無限粒子系に対してはすでに多くの研究がなされており、特に不変測度に関しては多くのことが知られている。一方時間発展特にそ

のゆらぎに関する性質については、未知の部分が多い。しかし近年 1 次元のいくつかの無限粒子系に対しては、そのような性質を調べられるようになってきている。これは無限粒子系の中に可積分な構造を内包する特別

に性質のよいものが存在し、それらに対しては、従来の手法では難しいと考えられた解析が可能となることを示唆している。

2. 研究の目的

本研究の目的は、ランダム行列や特殊関数に関連した可積分系の理論と手法を拡張・適用することにより、非対称排他過程等の1次元無限粒子系の時間発展に関する性質を詳細に調べるとともに、背後にある普遍的な数理解構造を探ることである。

3. 研究の方法

本研究においては、ランダム行列理論やベータ仮設、行列式型に書かれた遷移確率といった可積分系に関する手法を用いて、排他過程等の無限粒子系の揺らぎの性質を調べる。

4. 研究成果

平成19年度は、行列式に書かれた1次元非対称排他過程の遷移確率を用いる方法を発展させ、以下のような結果を得た。

まず、左半分が平坦で右半分が液滴状になるような境界条件の下での界面成長の揺らぎについて、特にその性質が変化する原点付近に着目した解析を行った。1点での高さ分布は、平坦部分と液滴部分でそれぞれ、ガウシアン直交アンサンブルおよびガウシアンユニタリアンサンブルと呼ばれるランダム行列の最大固有値の揺らぎと等しいことが知られていることから、境界部分では2つのアンサンブルの転移を記述するアンサンブルの揺らぎと等しいかと予想されたが、実際に計算を行ってみると、それとは別の揺らぎであることを強く示唆する結果を得た。

次に、これまでの解析は主として時間変数が連続の場合であったが、それを離散時間に拡張する研究を行った。その結果連続時間模型はある極限において連続時間の多核成長模型と呼ばれる界面成長模型を含んでいるが、その揺らぎの相関が Bessel 関数を用いた新しい積分核を持つフレドホルム行列式で与えられることが分かった。

また Schur プロセスと呼ばれる過程の一般化についても研究を進めた。

平成20年度は、1次元非対称排他過程において、粒子毎にホッピング率が異なるような場合の性質を調べた。まず、有限系において多時刻に関する粒子の位置の結合分布がフレドホルム行列式に書かれること、その積分核が2重の複素積分の形に書かれることは前年度までの研究の拡張として自然に得られることが分かった。次に、ホッピング率

が2種類の場合について漸近解析も含めより詳細に調べた。

普通のホッピング率の前に遅い粒子がいる場合、交通流という渋滞のようなことが起こり、密度が低い所から高い所に急激に変化することが予想されるが、それを実際に示すことができた。この場合、自然に得られる積分核で極限を取ることができないという困難が現れたが、行列式の値を変えないが有限な極限值を与えるような積分核の変形を見出すことにより解決することができた。また、ホッピング率が通常の粒子とほぼ同じ場合には、適当なスケーリング極限を取ることにより、これまでに知られていた分布間の遷移を記述する新しい分布を得ることができた。

この問題では別の極限を取ることにより時間に依存するランダム行列との関係もあり、それについての考察も進めた。

また、Schur 過程と呼ばれる関連する過程において、初期条件を任意にした場合の相関関数がやはり行列式の形に書けることを示し、その積分核を具体的に記述することができた。さらに特別な場合に対しては漸近解析も行い、外場のあるランダム行列との関係を議論した。

平成21年度は、まずホッピング率が異なる2種類の粒子のある非対称排他過程の性質を調べた。この過程においては、粒子のホッピング率の大きさなどを変えることにより、種々のスケーリング極限を考えることができる。たとえば、遅い粒子が複数ある場合における衝撃波の揺らぎは、有限次元ランダム行列と関係していることがわかった。

次に上述の研究から、Dysonの時間依存ランダム行列の固有値の最大値と、対称性のある時間依存ランダム行列の固有値には関係があることが分かった。これは、よく知られたブラウン運動の最大値と反射壁ブラウン運動の関係を多次元に拡張するものである。

さらにKPZ方程式と呼ばれる界面成長を記述する非線形確率偏微分方程式の漸近的な振る舞いを調べる研究も行った。まず空間離散化した過程の生成作用素のレゾルベントを調べることにより、揺らぎの指数が $1/4$ 以上 $1/2$ 以下であることを証明し、正確な値が $1/3$ と考えられる議論を与えた。また、非対称排他過程の流れに対するTracy-Widomの公式から出発することにより、狭いwedge型初期条件の場合に、1点における高さ分布を具体的に書き下すことができた。結果はフレドホルム行列式の積分という形になり、長時間での展開に適した形をしており、有限時間の補正も計算することができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

1. T. Imamura and T. Sasamoto, Dynamics of a tagged particle in the asymmetric exclusion process with the step initial condition, *J. Stat. Phys.* (査読有), 128 (2007) 799–846.
2. A. Borodin, P.L. Ferrari, M. Praehofer and T. Sasamoto, *J. Stat. Phys.* (査読有), 129 (2007) 1055–1080.
3. A. Borodin, P.L. Ferrari and T. Sasamoto, *Comm. Pure Appl. Mth.* (査読有), 61 (2008) 1603–1629.
4. T. Sasamoto, Fluctuations of the one-dimensional asymmetric exclusion process using random matrix techniques, *J. Stat. Mech.* (査読有), (2007) P07007.
5. A. Borodin, P.L. Ferrari and T. Sasamoto, Large time asymptotics of growth models on space-like paths II: PNG and parallel TASEP, *Comm. Math. Phys.* (査読有), 283 (2008) 417–449.
6. T. Imamura and T. Sasamoto, Correlation function of the Schur process with a fixed final partition, (査読有), 49 (2008) 53302.
7. T. Sasamoto, Exact results for the 1D asymmetric exclusion process and KPZ fluctuations, *Eur. Phys. Jour. B* (査読有), 64 (2008) 373–377.
8. A. Borodin, P.L. Ferrari and T. Sasamoto, Two speed TASEP, *J. Stat. Phys.* (査読有), 137 (2009) 936–977.
9. A. Borodin, P.L. Ferrari, M. Praehofer, T. Sasamoto and J. Warren, Maximum of Dyson Brownian motion and non-colliding system with a boundary, *Elect. Comm. Probab.* (査読有), 4 (2009) 486-494.
10. T. Sasamoto and H. Spohn, Superdiffusivity of the 1D lattice Kardar-Parisi-Zhang equation, *J. Stat. Phys.* (査読有) 137 (2009) 917–935.

[学会発表] (計 20 件)

1. T. Sasamoto, Particle Position Fluctuations in the Asymmetric

Exclusion Process, (International Meeting on Perspectives of Soliton Physics, Tokyo, Japan, 2007 Feb.

2. T. Sasamoto, Determinantal structure of the 1D asymmetric exclusion process and KPZ fluctuations, (STATPHYS23, Genova, Italy, 2007 Jul.
3. T. Sasamoto, Fluctuations of the 1D KPZ surface with flat initial conditions (Fluctuation and dissipation phenomena in driven systems far from equilibrium, Dresden, Germany, 2007 Jul.
4. T. Sasamoto, The fluctuations of the polynuclear growth model with flat initial conditions ((Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, Fukuoka, Japan, 2007 Oct.
5. 笹本 智弘, 非平衡統計力学 × 確率モデル × 厳密解 = ASEP (企画講演) (日本物理学会 2007 年秋季大会, 北海道大学, 2007 年 9 月)
6. 笹本 智弘, On the transitions between the GOE and GUE Tracy-Widom distributions (研究集会「ランダム作用素のスペクトルと関連する話題」, 京都大学, 2007 年 11 月)
7. 笹本 智弘, 1次元多核成長モデルの揺らぎ (「結晶成長の数理」第二回研究会, 学習院大学, 2007 年 12 月)
8. T. Sasamoto, Dynamics of a tagged particle in one-dimensional exclusion process (Workshop on Stochastic Eigen-Analysis (Random Matrices), Hong Kong, 2008 Jun.
9. T. Sasamoto, The fluctuations of a tagged particle in one-dimensional exclusion process (Random Tilings, Random Partitions and Stochastic Growth Processes, Montreal, Canada, 2008 Aug.
10. 笹本 智弘, 非平衡定常系のモデルの厳密解 (第二回若手奨励賞受賞記念講演) (日本物理学会 第 62 回年次大会, 近畿大学, 2008 年 3 月)
11. 笹本 智弘, 可積分系の手法を用いた 1次元確率的無限粒子系の解析 (特別講演) (日本数学会, 2008 年年会, 近畿大学, 2008 年 3 月)
12. 笹本 智弘, 2種類 of の速さを持つ 1次元非対称排他過程の粒子の位置の揺らぎ (日本物理学会, 2008 年秋季大会, 岩手大学, 2008 年 9 月)
13. T. Sasamoto, The dynamics of a tagged particle in 1D TASEP (Aggregation, condensation and coagulation in particle systems, University of

- Warwick, UK, 2009 Feb.)
14. T. Sasamoto, Dynamics of a tagged particle in infinite TASEP (Many-body systems far from equilibrium: Fluctuations, slow dynamics and long-range interactions, Max-Planck Institute Dresden, Germany, 2009 Feb.
 15. T. Sasamoto and H. Spohn, An analysis of lattice KPZ equation (Workshop on Open Systems: Non-Equilibrium Phenomena - Dissipation, Decoherence, Transport, ETH Zurich, Switzerland, 2009 Jun.
 16. T. Sasamoto and H. Spohn, Lattice KPZ equation (Scaling Limits in Models of Statistical Mechanics, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany, 2009 Aug.)
 17. T. Sasamoto, On the maximum of Dyson Brownian motion((研究集会「大規模相互作用系の確率解析」, 東京大学教理, 2009年10月)
 18. 笹本 智弘, 1D ASEP & KPZ (研究集会「非線形波動研究の現状と将来—次の10年への展望」, 九州大学応用力学研究所, 2009年11月)
 19. 笹本 智弘, GUE ダイソンブラウン運動の最大値の分布について(日本物理学会第65回年次大会, 岡山大学, 2010年3月)
 20. 笹本 智弘, ダイソンブラウン運動の最大値の分布について(日本数学会, 2010年年会, 慶応大学, 2010年3月)

研究者番号 :

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~sasamoto/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

笹本 智弘 (SASAMOTO TOMOHIRO)

千葉大学・理学研究科・准教授

研究者番号 : 7 0 3 3 2 6 4 0

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()