

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007～2008

課題番号：19740045

研究課題名（和文） スタイン現象に対処する許容的な推定量の追求

研究課題名（英文） Admissible estimators on the Stein phenomenon

研究代表者

氏名（アルファベット）：丸山 祐造（MARUYAMA YUZO）

所属機関・所属部局名・職名：東京大学・空間情報科学研究センター・准教授

研究者番号：30304728

研究成果の概要：正規分布における未知母数の推定問題を考える．平均も分散も未知の場合，通常「分散が未知の下での平均の推定問題」あるいは「平均が未知の下での分散の推定問題」が別個に考えられてきた．しかし，両方未知であるのでどちらも同時に推定する方が自然である．損失関数としては，平均ベクトルに二乗損失，分散にエントロピー損失を仮定し，それらの適当な重み付き和を用いる．本科研費の成果として，平均と分散のそれぞれ最良不偏推定量を優越する縮小型ベイズ推定量を提案した．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,700,000	0	1,700,000
2008年度	1,600,000	480,000	2,080,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,300,000	480,000	3,780,000

研究分野：数学一般（含む確率論・統計数学）

科研費の分科・細目：

キーワード：数理統計学，統計科学

1. 研究開始当初の背景

確率分布の未知パラメータ（平均や分散など，分布を特徴付ける量．ベクトルであってもよい）を，その分布からの標本をもとに推定量で言い当てるとき，推定量はパラメータの真値に近い方が望ましい．統計的決定理論では，推定量と真値が離れるほど値が大きくなる損失関数を用意して，その期待値であるリスク関数をもとに推定量の善し悪しを評価する．このとき，任意のパラメータについて他の全ての推定量よりもリスクが小さくなるような絶対的に良い推定量は存在しないので，使うべき推定量を決めるのは容易ではな

い．しかし，使うべきでない推定量を決めるのは容易である．それが非許容性であり，非許容的でない推定量を許容的であるという．許容性は最適性の基準としては非常に弱く，それ故に是非満たして欲しい性質である．また許容性は，統計学の枠に収まらない普遍的な概念であり，例えば経済学でパレート最適として知られている均衡状態の概念と同等である．本研究で興味があるのは，他の基準で良いとされる自然な推定量（例えば最小分散不偏推定量や最尤推定量など）が非許容的となる現象の理論的解明である．この現象は，Stein (1956)による「 X が多変量（次元3以

上) 正規分布に従うとき, 平均ベクトルの自然な推定量 X が二乗損失関数の下で非許容的である。」という指摘に端を発している。その後, Brown (1966, 1979) が示したように正規性や二乗損失関数の仮定は本質的ではなく, 複数のパラメータを同時に推定する場合に同様の現象が起こることが知られており, 一般にスタイン現象あるいはスタイン問題と呼ばれている。また, 「実際に改良する推定量として知られている James-Stein 推定量に Efron and Morris (1972) によって経験 Bayes 的解釈が与えられたこと」また「3次元が許容性, 非許容性の境界になっていることに対して, Brown 運動の再帰性・非再帰性と強く関連していることが Brown (1971) によって示されたこと」でそれぞれ応用的観点, 理論的観点の両面から興味深く, 多くの研究者により研究されてきた。

2. 研究の目的

Brown (1966, 1979) が指摘したように, 複数のパラメータを同時に推定する場合, 分布や損失関数にほぼ無関係に自然な推定量が非許容的になることが多い。この場合, 自然な非許容的推定量を改良する推定量を明示的に提案することが, 重要なテーマの一つである。もちろん一般的な問題設定では難しく, 過去の研究においては, 数学的に非常に扱いやすい特定の分布, 損失関数(具体的には, 分布としては正規分布, 指数型分布族, 多変量球面对称分布, 損失関数としては二乗損失関数, カルバックライブラ損失関数が挙げられる)について結果が得られてきた。しかし, 提案された推定量もまた非許容的であれば, さらにその推定量を改良する推定量を探すという, よりやっかいな問題が生じることに注意する必要がある。従って, 「非許容的な推定量を改良し」かつ「許容的な」推定量を導出することが非常に重要であり, これが研究課題である「スタイン現象に対処する許容的な推定量の追求」の意味である。本プロジェクトでは, 個々の未解決な場合を意識しつつ, 出来るだけ一般的な設定で, 非許容的な推定量を改良する許容的な推定量を考える。

3. 研究の方法

この研究は理論的研究であり, 自分の頭で考え, また問題を共有する共同研究者と議論を行う以外のことはしていない。共同研究者とのディスカッションのため, 受領金額のおおくを使わせて頂いたことに感謝する。具体的に, 議論した海外研究者は以下の通りである。

Larry Brown 教授 (ペンシルバニア大) 許容性について非常に多くの論文があり, 統計的

決定理論の権威である。研究全体について議論した。

James Zidek 教授 (ブリティッシュコロンビア大) 一般化 Bayes 推定量の許容性を考えるとき, Bayes risk difference を評価する(上から抑える)ことが必須である。そのための重要なアイデアが Zidek (1970) にあり, その拡張可能性について議論した。実際にはこの拡張はうまく出来なかった。

Edward George 教授 (ペンシルバニア大) 予測問題における許容性の問題, 及びリッジ回帰推定量を用いた予測について議論した。

Bill Strawderman 教授 (ラトガース大) スタイン問題での階層型一般化事前分布の創始者である。本プロジェクトでは, 私の目的に役に立つ事前分布について, 詳細に議論した。

4. 研究成果

ここでは, 研究期間終了時点での最新結果である Maruyama (2009) および Maruyama and Strawderman (2009) の研究結果の概略を述べたい。

(1) X が p 変量球面对称分布に従っているときにその平均ベクトル θ の推定問題を二乗損失関数のもとで扱う。この問題において一般化ベイズ推定量が許容的かどうかの特徴付けは, Maruyama and Takemura (2008) でなされたが, 必ずしも分かりやすい条件ではなかった。それをより分かりやすく, またよく知られた正規分布の仮定下でのそれと対応した形で, 提案するというのが主眼であった。まず, この種の問題に対しては, 通常プライスの十分条件が使われることを確認しておく。プライスの十分条件により, 許容性を証明するには, 証明しようとする improper な事前分布に漸近的に近づく proper な事前分布の列で性質のよいものを見つける必要がある。そのような事前分布の列の中で, 有名であるが, 理論的にやや不満足な列として, Brown and Hwang (1981) が挙げられる。この列はターゲットとなる事前分布と独立に作られていることが一つの特徴である。その特徴を保ったままで, Brown-Hwang type の列を改良したのが, Maruyama and Takemura (2008) であった。しかし, ほとんどの事前分布が, この論文で提案された十分条件でカバーされるが, 正規分布の場合に完璧な十分条件として知られている Brown (1971) のものと対応がつかない。これを解決するため,

Maruyama and Takemura (2008)の列をターゲットとなる事前分布に依存させるように修正することにより、正規分布の場合には、Brown (1971)の正規分布の結果と完全に対応する十分条件が得られた。もちろん私の結果は、非正規分布の場合も含んでおり、Brown (1971)のエレガントな十分条件が、非正規の場合にも適用できることを示した。またその十分条件を満たす事前分布として、調和関数がある。その調和関数を事前分布とする一般化ベイズ推定量は、自然な推定量 X を改良する十分条件をチェックしやすい形をしている。実際に多変量学生分布を含む広いクラスに対して、改良する十分条件を満たすことを確認した。つまり、非正規の場合に、自然な推定量 X を改良して、かつ許容的な推定量が提案できたことになる。

- (2) 正規分布における未知母数の推定問題を考える。平均も分散も未知の場合、通常「分散が未知の下での平均の推定問題」あるいは「平均が未知の下での分散の推定問題」が別個に考えられてきた。しかし、両方未知であるのでどちらも同時に推定する方が自然である。損失関数としては、平均ベクトルに二乗損失、分散にエントロピー損失を仮定し、それらの適当な重み付き和を用いる。本科研費の成果として、平均と分散のそれぞれ最良不偏推定量を優越する縮小型ベイズ推定量を提案した。この問題について、許容性を考えるのは難しいが、現在研究進行中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Yuzo Maruyama (2009). An admissibility proof using an adaptive sequence of smoother proper priors approaching the target improper prior. *Journal of Multivariate Analysis*. 掲載決定 . 査読あり .

Yuzo Maruyama and William E. Strawderman (2009). An extended class of minimax generalized Bayes estimators of regression coefficients. *Journal of Multivariate Analysis*. 掲載決定 . 査読あり .

丸山祐造 . (2007). 縮小型推定量を用いた Universal Kriging Predictor. *日本統計学会誌*, 37, 151-160. 査読あり .

[学会発表](計 15 件)

丸山祐造 . [2008.11] Extending the g-prior for Bayesian model selection. 科学研究費研究集会「時空間現象に対する統計科学モデルの構築及び解析に関する組織的研究」, 沖縄青年会館.

丸山祐造 . [2008.10] Extending the g-prior for Bayesian model selection. 京都大学数理解析研究所「A Bayesian Approach to Statistical Inference and Its Related Topics」研究会.

Yuzo Maruyama. [2008.07] A g-prior extension for $p > n$. Workshop on current trends and challenges in model selection and related areas, Vienna.

丸山祐造 . [2008.06] 線形回帰モデルにおけるベイズ型変数選択基準. 東京大学統計輪講 . 東京大学経済学部

Yuzo Maruyama. [2008.05] A new Bayesian variable selection criterion based on a g-prior extension for $p > n$. Statistics department seminar, University of British Columbia.

Yuzo Maruyama. [2008.03] A new Bayesian variable selection under the regression model – A g-prior extension for $p > n$ –. Statistics department seminar, University of Pennsylvania.

Yuzo Maruyama. [2008.01] A new Bayesian variable selection under the linear regression model. 10th Annual Winter Workshop “Bayesian Model Selection and Objective Methods”, University of Florida.

丸山祐造 . [2007.12] 線形回帰モデルにおけるベイズ型変数選択基準. 科学研究費研究集会「時空間現象に対する統計科学モデルの構築及び解析に関する組織的研究」, 岡山大学.

丸山祐造 . [2007.11] 線形回帰モデルにおけるベイズ型変数選択基準. 科学研究費研究集会「統計的モデリングの方法と理論」, 一橋大学.

丸山祐造 . [2007.11] R で空間統計解析. 空間情報科学研究センター第 10 回シンポジウム. 東京大学柏総合研究棟.

丸山祐造 . [2007.11] 線形回帰モデルにおけ

る新たなベイズ型変数選択規準について. 京都大学経済研究所・計量経済学セミナー. 京都大学.

丸山祐造 . [2007.07] 予測分布に関連した縮小推定及びベイズ型変数選択規準 . 東京大学統計輪講 . 東京大学経済学部

丸山祐造 . [2007.06] 正規線形回帰モデルに対する新たなベイズ型モデル選択基準, 神戸大学.日本統計学会 .

丸山祐造 . [2007.06] 正規線形回帰モデルにおける新たなベイズ型変数選択規準 . 九州大学大学院数理学研究院統計科学セミナー . 九州大学 .

丸山祐造 . [2007.06] R で空間統計解析. CSIS Symposium 「空間情報社会の到来：社会動向と空間統計学の普及」. 東京大学山上会館.

6 . 研究組織

(1)研究代表者

研究代表者

丸山 祐造 (MARUYAMA YUZO)

東京大学・空間情報科学研究センター・准教授

研究者番号 30304728