

平成22年 6月 9日現在

研究種目： 若手研究 (B)  
 研究期間： 2007~2009  
 課題番号： 19740047  
 研究課題名 (和文) 非線型集合における確率解析の研究  
 研究課題名 (英文) Stochastic Analysis on nonlinear sets  
 研究代表者  
 乙部 巖己 (OTOBE YOSHIKI)  
 信州大学・理学部・講師  
 研究者番号： 30334882

研究成果の概要 (和文) : 通常の Wiener 空間を含む一般のガウス測度の導入された連続関数の空間における、指定された値以上の関数からなる自然な凸集合に対して発散定理を定式化した。それによって発散定理の性質が速度のマルコフ性よりもむしろ、ガウス測度とその最大値のもつある種の正則性によって制御されていることを示した。またフラクタル集合上のパーコレーションの臨界確率を数値解析によって得たほか、特異な外力項を持つ相互作用粒子の運動を可視化、レヴィ型の雑音項を持つ偏微分方程式の解の挙動の可視化などに成功した。これによって新しい知見のもとで正則性に関する予想とそれに対する数学的に厳密な証明を与えることにも成功した。

研究成果の概要 (英文) : We have formulated a divergence formula on convex sets in the Gaussian space which include usual Wiener spaces. We found that a certain regularity of the maximal of the processes under the Gaussian measure plays an essential role rather than Markov properties which was believed. We also succeeded in recovering known formulae using Markov properties then, which is a concrete expression of our divergence formulae. We have also obtained a critical probability for a percolation on a fractal set. We have succeeded in visualizing a motion of interacting particles, solutions to stochastic partial differential equations driven by Levy type noises.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,500,000	0	1,500,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	510,000	3,710,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード： マリアバン解析・確率偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

(1) 連続関数からなる空間において、たとえ

ばその最小値が正であるような関数からなる部分集合に対する発散定理は、確率過程論

を積極的に援用した定式化と証明が知られていただけであった。

(2) シェルピンスキー格子上のパーコレーションについては、その臨界確率が存在することは知られていたが、直観的に予想されるような大体の評価と比べ、証明されていた評価は大変荒いものであった。

(3) 2次元粒子が独立な雑音に従って運動し、他の粒子と対数ポテンシャルの相互作用をする場合はクーロン型の相互作用であり非常に基本的な対象であるが、その運動の様子を解析することはきわめて難しい問題であった。

(4) レヴィ型の雑音を伴う確率偏微分方程式については、ごく一部の先駆的研究を除けば、ほとんど解析されていない状況であった。

## 2. 研究の目的

(1) 発散定理を確率過程論によらないいわゆる解析的方法によるのみ定式化し、発散定理成立の仕組みを明快なものとする。

(2) シェルピンスキー格子上のパーコレーション臨界確率を予想する。もし格子のフラクタル構造からくる欠陥が、一様確率に従っておれば、その値は既知の結果から直ちに導かれる。それと比較してフラクタル構造による構造の欠陥がどの程度「乱雑」であるかを探る。

(3) 数百以上の粒子に対して数値計算を行い、その運動の様子を可視化する。それによって運動がどのように生じているかを理解し、無限粒子系への移行を直観的に把握する。

(4) レヴィ型の雑音はきわめて多岐にわたるため、数学的に適切なモデルを探る必要がある。そのため、雑音、また解の様子を可視化し、適切なモデルを探る。

## 3. 研究の方法

(1) Wiener 空間上の発散定理は従来確率過程論を援用して定式化および証明がなされていた。これをガウス測度を与えた空間におけるマリアヴァン解析を援用して定式化、および証明を与える。

(2) シェルピンスキー格子上のパーコレーションをシミュレートするには、通常の平方格子状でパーコレーションを実現し、その後格子欠陥を実装することで可能である。さらにスケール仮説を設定することで補間法を用いて臨界確率を算出する。

(3) 複素平面上の確率微分方程式をオイラー・丸山法を用いて計算する。さらにすべての相互作用を計算に組み入れ、各瞬間ごとに粒子の存在位置を出力してそれを重ね合わせることで動画を作成する。

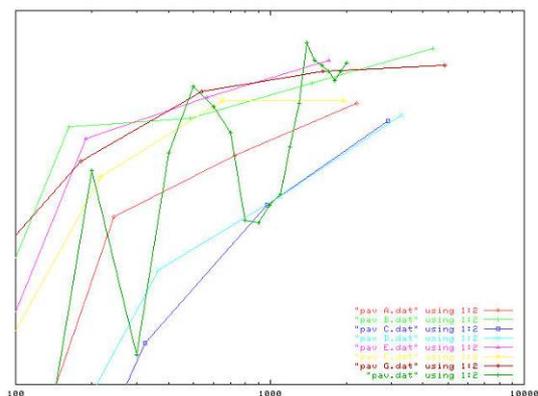
(4) 一次元の独立な定常過程の見本路を1000作成する。さらにそれらを1000次元の具体的に与えた基底に合わせて加えること

で十分に高次元での雑音の近似を行う。その雑音を用いて陰的近似法を用いることで会の詳細な様子を描写することを可能とする。

## 4. 研究成果

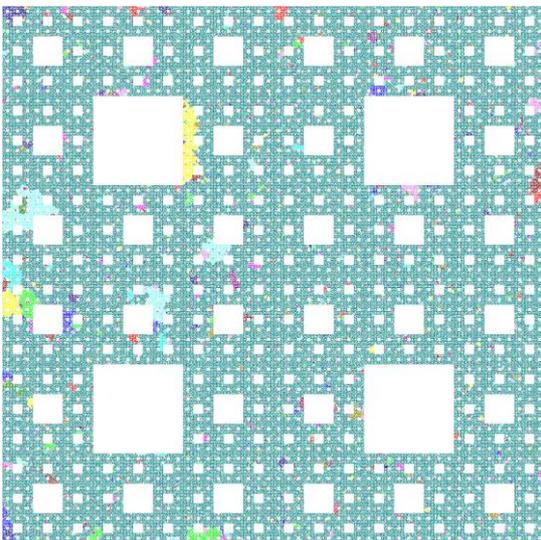
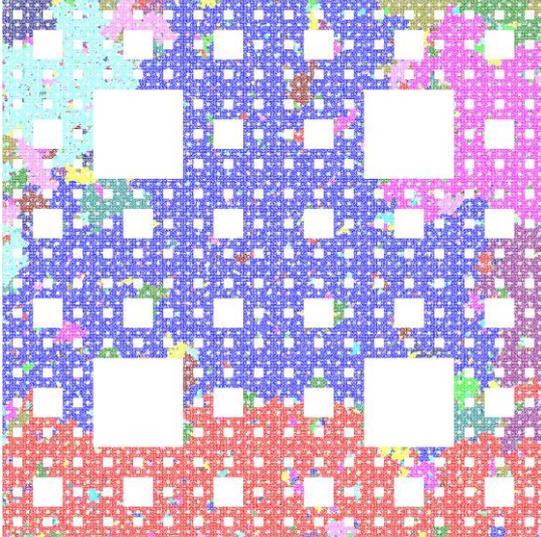
(1) 退化したウィナー空間上の汎関数の中でも局所非退化の条件を満たすものに対して渡辺超関数の合成理論が成立することを証明した。この渡辺超関数を用いることで解析的な記述による発散定理の成立を証明することができた。この定理の成立の条件はガウス過程のある種の汎関数が局所非退化ということだけであり、従来信じられてきた背後にある確率過程がマルコフ性を持つことが本質的な条件ではないことが示された。また渡辺汎関数の双対写像を用いることできわめて簡単に従来知られてきた確率過程論的な表現を得ることができるとも示した。この部分の表現にのみマルコフ性が必要となることも示された。

(2) シェルピンスキー格子上のパーコレーション臨界確率が0.559程度であることを合理的な仮設のもとで示すことができた。これは格子欠陥が一様である場合と比べてもあまり大きな差ではなく、予想されていたものと比較してかなり小さな値であった。なお、この数値解析を通じてより簡単にパーコレーションの様子を可視化することができるソフトウェアを作成し、Web ページ上で公開している。このソフトウェアは確率モデルや離散確率の問題などを例示するためにも用いられており、啓蒙活動の一助ともなっている。下に示すのは得られたシミュレーション結果の一部で、おおざっぱに言ってこのグラフが直線になるときが臨界確率である。



またこれらのパーコレーション過程の見本路は下の図のようになる。(パーコレーション確率が0.56および0.57の場合の図)。これによって臨界確率を超えた場合の挙動が視覚的に把握できるようになった。なお、このクラスタを色づけする方法もまたこの研

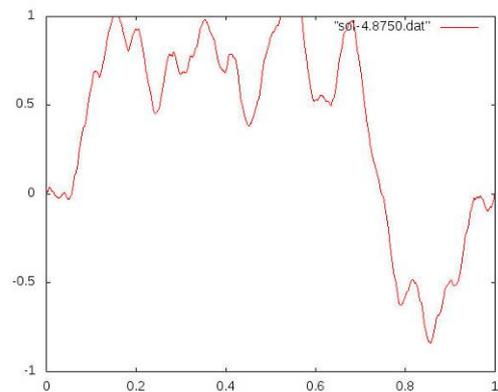
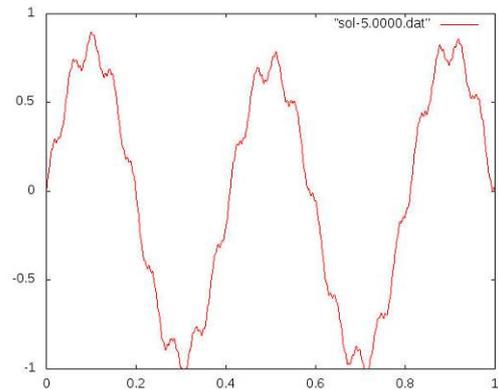
究で得られたものである。



(3) 粒子数が数十程度のものから数百におよぶものまで運動の様子を動画として作成した。なお、相互作用のない場合との両者を結合した運動の様子動画もある。この成果は Web ページ上にて公開されている。これによってジニブレ粒子系の無限粒子極限に自然なスケーリングを示したほか、方程式が推移不変性を持たない状況下で極限分布が推移不変になる様子を明確に理解することができる。

(4) 白色レヴィ型雑音によって記述される運動は一般に可積分性を持たない。そのため従来ガウス型の場合を想定してきて発展した手法の多くが適用できない。従来までの研究では、比較的多くの場合においてそれらが適用できるように方程式を変形してある意味で自明な結論を導くものが散見された。こ

の研究では多くの場合について想像されていたよりも遙かに高い正則性を持っている可能性が数値計算によって示された。その信念に基づいて、現在見本路ごとに関数解析の手法を適用する方法などを組み合わせて、いくつかの場合に高い正則性を証明できるようになった。それらの成果は現在論文執筆中であり、またこの動画を含むいくつかのグラフ等も当該論文中に提示すべく準備中であるほか、Web ページへの掲載も準備中である。下に示すものは得られた図のうちのごく一部で、定常雑音のパラメータが 0.1 の場合と 1.9 の場合のある時刻における解の様子である。



これらからある種の擬周期性を持つことや、パラメータが小さい方が解が正則であることなどが予想できるが、それらについては厳密な証明を与えることができ、ヘルダー連続性の指数が  $1/\alpha$  で支配されていることがわかった。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

1. Y. Otobe, A type of Gauss' divergence formula on Wiener space, Electron. Commun. Probab. 14, pp. 457-463, 2009.

[学会発表] (計 9 件)

1. Y. Otobe, Recurrence Properties for Quantum Dynamics, 2010. Stochastic Partial Differential Equations seminar, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, University of Cambridge
2. Y. Otobe, Recurrence Theorem and Ergodicity of Quantum Dynamics, 2009. 「VIIIth workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems」, 東京大学
3. Y. Otobe, SLEs and free fields, 2009, Workshop on SLE and related topics, 九州大学
4. Y. Otobe, TeX in Japan and Professor Oshima, 2009, 「Differential Equations and Symmetric Spaces」, 東京大学
5. Y. Otobe, Divergence formulae on the space of continuous functions and applications to stochastic PDEs, 2008, 「Mathematical Finance and Stochastic Analysis Seminars」, University of York
6. Y. Otobe, Divergence formulae on the space of continuous functions and Malliavin calculus, 2008, 「東大数理確率論特別セミナー」, 東京大学
7. Y. Otobe, A type of Gauss' divergence formula on the Wiener space, 2007, 「Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems」, 九州大学
8. Y. Otobe, Numerical Behavior of Electromagnetic Waves Penetrating through Pre-Cantor Dielectric Mediums, 2007, 「International Workshop on Photonic Fractals」, 大阪大学
9. Y. Otobe, The critical probability of bond percolation on the Sierpiński carpet lattice, 2007, 「無限粒子系、確率場の諸問題 II」, 奈良女子大学

[図書] (計 1 件)

1. 乙部 巖己, 理工系学生のための情報科学概論, プレアデス出版, 2009, 978-4903814223.

[その他]

ホームページ等

<http://argent.shinshu-u.ac.jp/lab/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

乙部 巖己 (OTOBE YOSHIKI)

信州大学・理学部・講師

研究者番号: 30334882