

平成 22 年 6 月 17 日現在

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007～2009

課題番号：19740053

研究課題名（和文） 順序セルオートマトンにおけるソリトンとカオスの数理構造

研究課題名（英文） Mathematical Structure of Soliton and Chaos in Sequential Cellular Automata

研究代表者

由良 文孝（YURA FUMITAKA）

公立はこだて未来大学・システム情報科学部・准教授

研究者番号：90404805

研究成果の概要（和文）：

これまでに順序セルオートマトン（以下CA）上にソリトンが存在することを離散ハングリー-Lotka-Volterra 方程式に帰着することにより解明してきた。このモデルにおける特徴を考察することにより、本モデルがなぜこのような可積分系を含みうるのかという点を解析した。

これらの解析を踏まえ、有限状態からなる（フィルター型）CAを有限体上で考察した。その結果、有限体上に値を持つソリトン系が得られた。有限体上での可積分系についての研究は過去に例があるが、本研究のような有限体上で定義される「ソリトン系」は現在まで提案されていないと思われ、本研究で初めて得られた萌芽的進展である。有限体は、実数や max-plus 代数とは異なる代数構造を持つため、可積分系の新たな一分野となる可能性があると思われる。

研究成果の概要（英文）：

We have clarified the existence of soliton system on sequential cellular automata (CA) by the reduction to discrete hungry Lotka-Volterra equation and have analyzed the reason why this model can involve such integrable system as this one.

The (filter-type) CAs which consist of finite states are considered. As a result, finite-field-valued soliton systems are obtained. There exist several studies on integrable systems over finite fields in the past, however, it seems probable that *soliton systems* over finite fields have not been shown as far as we know. This novel system could give seminal development in integrable systems because the algebraic structure of finite fields is different from that of real numbers and max-plus algebra.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,900,000	0	1,900,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	390,000	3,590,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード： 離散数学、ソリトン系、有限体

1. 研究開始当初の背景

箱玉系は従属変数が 0 と 1 からなる可積分な離散力学系であり、1990 年に高橋大輔氏および薩摩順吉氏によって発見された。以来、この離散状態における可積分系が注目を集め続けてきた。その理由としてはいくつか挙げられるが、

- (1) 1996 年に発見された箱玉系の保存量と、超離散化と呼ばれる極限操作によって、非線型可積分系に結び付けられ、ソリトン系であることが示されたこと
- (2) 箱玉系は組み合わせ論的な Yang-Baxter 関係式を満たすが、これが量子群におけるクリスタルの表現論と、そこにおける可解格子模型に由来していること

などが数理的な背景として挙げられる。一方、類似している系としてセルオートマトンが存在する。これまでセルオートマトン系については、複雑系研究の中で多くの研究がなされてきた。例えば、1 次元セルオートマトン系の漸近的な解は、大きく分けて (1)空間的に均一、(2)周期解、(3)カオス、(4)部分的に複雑なパターン（いわゆる「カオスの縁」）、それぞれクラス 1~4 に分類されている。また、ここで、厳密な意味において箱玉系は、いわゆるセルオートマトンではないことに注意しておく。状態空間は同じであるが、満たすべきルールはセルオートマトンでは局所的であるのに対し、箱玉系では非局所的である（フィルター型と呼ばれる）。

箱玉系とセルオートマトン系は共に離散値を値に取る力学系である。しかしながら前者は可積分系、後者は主に複雑系と、その出自は違い、また満たすべきルールも全く異なる力学系である。これまで、両者を共に含む枠組みを模索してきた。

2. 研究の目的

- (1) 本研究の開始時まで、代表者は「順

序セルオートマトン(順序 CA)系を発見、提案した。この 1 次元順序 CA モデルは、通常のセルオートマトンにおける 4 つのクラスを含む。これに加えソリトン解が存在することを証明した。このように、従属変数が離散値を取る力学系におけるソリトンからカオスまでを包含した 1 次元モデルは、代表者の知る限り新しい系であると思われる。このモデルの解明が本研究の目的の一つである。

- (2) 箱玉系は離散 KdV 方程式や離散 Lotka-Volterra 方程式の超離散化として与えられる。これらの方程式は離散 KP 方程式のリダクションとして理解されるが、このリダクション条件を変えることにより箱玉系に類似した超離散ソリトン系が得られると考えられる。
- (3) 超離散化の手法は、力学系の「デジタル化」に有効であることが知られている。超離散化された系において多くの場合、パラメータや初期値を整数に制限することにより整数上で閉じた系を得ることができる。しかしこの制限は必ずしも必要ではなく、本質的には実数（あるいは有理数）上の力学系と見なすべき区分線形系である、とも考えられる。そこで従属変数を有限集合上（特に有限体）に限り力学系を考察することにより、そのような背景を持たない力学系における「可積分性」を解明することを目的とする。箱玉系が離散 KP 方程式の双線形形式から導かれる系であることに着目し、数式上の類似をもとにして有限体上に類似の力学系を構築する。

3. 研究の方法

- (1) 順序 CA 上に可積分系が存在することは、あるルールが離散ハンダリー Lotka-Volterra 方程式に帰着することにより示された。また「可積分」順序

CA と見なせるルールの列挙については計算機による数値実験により行う。その結果を踏まえ、方程式レベルでの可積分性が CA のレベルでどのように現れるか明らかにする。有限な相空間での可積分性・カオス性を包括的に特徴付ける目的のため、計算機シミュレーションを用い、順序 CA 上での新たな可積分系を探索する。この探索には計算機実験が欠かせない。

4. 研究成果

本報告書では得られた具体例を示すこととし、詳細は参考文献①などに譲る。次式で与えられる時間発展を考える。

$$u_n^{t+1} = -M \left[u_n^t - 1, \sum_{k=-\infty}^{n-1} (u_k^{t+1} - u_k^t) \right]$$

ここで離散独立変数 t と n は整数に値をとるものとし、 u_n^t は \mathbf{F}_3 に値をとるものとする。また関数 $M : \mathbf{F}_3 \times \mathbf{F}_3 \rightarrow \mathbf{F}_3$ は以下の関数とする。

$$M(a, b) = 2(a^2 + ab + b^2 + a + b)$$

この関数 M は最大値関数の有限体上の類似と考えられる関数であり、交換則と分配則などいくつかの望ましい性質を持つものである。また上記時間発展則は、箱玉系での運搬車描像を用いて記述できること、および、順序セルオートマトンを用いて記述できることに注意しておく。

以下に具体的な初期値を与えた時間発展例を示す。

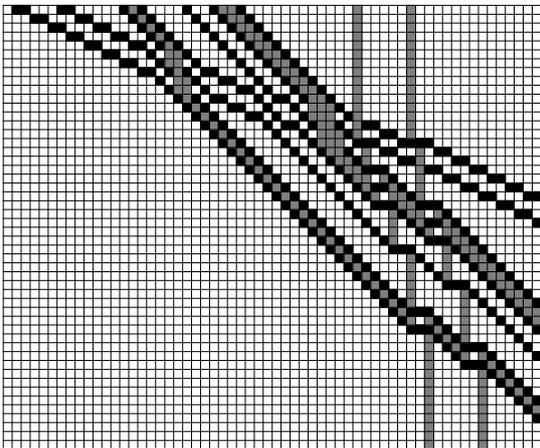


図 1: 時間発展の一例

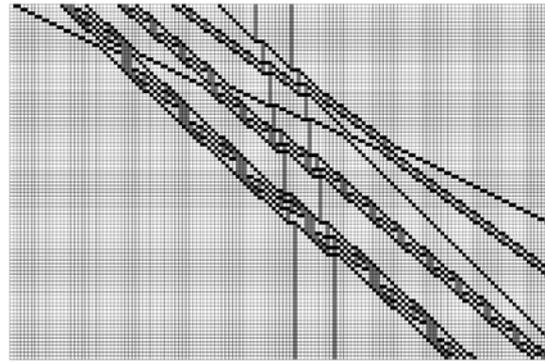


図 2: 時間発展の一例

可積分セルオートマトンである箱玉系の双線形式の類似を考えることにより、有限体上でのソリトン系を提案した。現在のところこの系におけるソリトン解の構造には不明な点が多いが、すでに得られている超離散系での知見をもとにソリトン系や一般のセルオートマトン系の代数的な究明と、有限体の重要な応用例である暗号・符号理論などに対する可積分系理論からの寄与が期待できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① 由良 文孝、有限体上におけるソリトン方程式について、電子情報通信学会 信学技法、査読無、NLP2009-89、39-44 (2009)。
- ② 吉田 真将、由良 文孝、離散 KP 方程式のリダクションから得られる超離散ソリトン系について、九州大学応用力学研究所研究集会報告書、査読無、20ME-S7、182-187 (2008)。
- ③ 小松 高廣、由良 文孝、上野 嘉夫、上田 皖亮、非線形パラメータ励振系におけるカオスと散逸エネルギー ～ 中性点反転現象をモデルとして ～、電子情報通信学会 信学技法、査読無、NLP2007-122、11-16 (2007)。
- ④ Atsushi NOBE and Fumitaka YURA, Linearizable cellular automata, 査読

あり, J. Phys. A: Math. Theor. 40, 7159-7174 (2007).

- ⑤ 野邊 厚、由良 文孝、可逆エレメンタリーセルオートマトンの可積分性について、査読無、京都大学数理解析研究所講究録 1541 「可積分系数理の眺望」(2007).

[学会発表] (計 5 件)

- ① 由良 文孝、有限体上の可積分セルオートマトン、研究集会「離散・超離散系の課題」、2010年3月15日、島根大学.
- ② Fumitaka YURA, Integrable systems in sequential cellular automata, China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems, 7 January 2010, Shaoxing University.
- ③ 由良 文孝、有限体上におけるソリトン方程式について、電子情報通信学会 非線形問題研究会(NLP)、2009年11月11日、屋久島環境文化村センター.
- ④ 吉田 真将、由良 文孝、離散 KP 方程式のリダクションから得られる超離散ソリトン系について、九州大学応用力学研究所 研究集会「非線形波動の数理と物理」、2008年11月6日--8日、九州大学.
- ⑤ 小松 高廣、由良 文孝、上野 嘉夫、上田 皖亮、非線形パラメータ励振系におけるカオスと散逸エネルギー ~ 中性点反転現象をモデルとして ~、電子情報通信学会 非線形問題研究会(NLP)、2007年12月20日、福井工業大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

由良 文孝 (YURA FUMITAKA)
公立ほこだて未来大学・システム情報科学部・准教授
研究者番号： 90404805

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし