

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007～2009

課題番号：19740059

研究課題名（和文）変分解析による逆関数定理の展開と最適化問題への応用

研究課題名（英文）Developments of inverse function theorems by variational analysis and applications to optimization problems

研究代表者

関口 良行（SEKIGUCHI YOSHIYUKI）

東京海洋大学・海洋工学部・助教

研究者番号：50434890

研究成果の概要（和文）：

変分解析における距離正則性に対して、関数解析的手法による定量解析と最適化問題などに現れる不等式系に対する距離正則性の応用研究を行った。主な研究成果は以下の通りである。

1. Banach 空間上の不等式系に対する正則性のモジュラスの等式評価を与えた。証明に際して、既存手法の限界を反例を挙げることで示し、同値ノルムの列を考慮することが鍵となった。2. 成果 1 を一般化し、Banach 空間上の閉凸グラフを持つ集合値写像に対する正則性のモジュラスの等式評価を与えた。3. ユークリッド空間上の連続写像によって定義される集合に対して、劣微分の計算を繰り返し用いることで法線ベクトルの公式を得た。

研究成果の概要（英文）：

We considered metric regularity in variational analysis, focusing on its quantitative analysis through functional analytic methods and applications to inequality systems, which especially appear in optimization problems. Our main contributions are the following: 1. Exact estimates of modulus of metric regularity for inequality systems in Banach spaces are given. The key idea is to consider a sequence of equivalent norms on the space. 2. By generalizing the result of 1, regularity estimates for convex set-valued mappings between Banach spaces are given. 3. Formulas for normal cones to a set defined by continuous operators in Euclidean spaces are obtained. The arguments use calculus of subdifferentials repeatedly.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,100,000	0	1,100,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,600,000	450,000	3,050,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：非線形関数解析、変分解析、最適化理論

1. 研究開始当初の背景

変分解析における距離正則性の概念は、関

数解析の基本定理である開写像定理や逆関数定理、アルゴリズムの計算量解析などと密接な関係を持つことが認識され、近年注目を集めている。

本研究では、距離正則性について関数解析的な手法による理論研究と最適化問題への応用研究を行った。

2. 研究の目的

(1) 本研究では、変分解析 (variational analysis) を用いて、一般化された逆関数定理を理論、応用の両面から研究する。我々の扱う一般化された逆関数定理とは、写像の逆像が局所的にも一価にならない場合でも、逆像が集合値写像(多価写像)として良い性質、Metric regularity を持つことを保証するものである。この Metric regularity は、最適性の必要条件や双対定理などを得る際に用いられる、連続的な最適化問題の現代的な取り扱いにおいては根幹を支える概念の一つである。

このような Metric regularity の定性的、定量的な研究、それを応用した最適化問題における正則性、制約式の疎性を考慮した摂動定理、アルゴリズムの計算量解析を行う。

(2) 逆関数定理はさまざまな応用を持つだけでなく、それ自体興味深い定理である。通常逆関数定理は、微分が可逆(invertible)のとき逆像が一価で滑らかであることを保証するが、関数空間では微分(または偏微分)が可逆にならない場合が多い。しかし、微分が全射であれば、逆像が局所的に多価であっても好ましい振る舞いをするところがあることが Liusternik によって示されている。

この現象は最適化問題などに頻出する集合値写像においても現れることがわかっており、変分解析では Metric regularity(または単に正則性)と呼ばれる。Metric regularity は関数解析の他の基本的な定理や最適化問題の双対性、制約想定などと密接な関係を持つこと徐々に明らかにされており、我々は Metric regularity 自身の性質や他の概念との関係性をさらに追及する。

また、変分解析の手法によって写像の Metric regularity の良さを数値化(rate of regularity)することが可能である。その数を用いた研究が近年盛んに行われているが、我々はその数に対する新たな公式を与え、未解決問題であった無限次元空間における正則半径の定理(radius theorem)を連続関数空間を含む Banach 空間において証明することに成功した。連続関数空間における議論を突破口として、他の関数空間や一般のノルム空間における性質を究明する。

さらに、関数空間上の最適化問題では連続関数空間はよく現れることから、この定理の

特に最適化問題への応用が期待でき、我々は次のような構想でこの定理の応用研究をする。

(3) Metric regularity に対する定量的解析は、最適化問題の正則性に対する定量的解析とアルゴリズムの計算量解析につながる。

Metric regularity の定量的解析をすることによって、制約式の安定性を数値化することができる。この数は例えば、実行可能解の存在範囲を教えてくれる。このように制約式の安定性を詳細に解析できるようになったのは最近のことであり、まだ基本的であっても未解決な問題が多い。

我々はその中で、連続関数空間上の不等式制約に対してその安定性をあらゆる数の正確な評価を与えることに初めて成功している。他の関数空間上の制約式に対しても同様な評価ができるかをさらに研究する。

そしてこの結果は前節の結果と合わせると、最適化問題に対する内点法などのアルゴリズムの計算量解析を可能にする。というのは、正則半径の定理を通じて、内点法の条件数は数値化された制約式の安定性と密接な関係をもつことがわかっているからである。この関係は最近知られたものであり、我々は本課題において内点法などのアルゴリズムの計算量解析に変分解析を応用し、Metric regularity、つまり集合値写像に対する逆関数定理と計算量の関係を解明する。

(4) Renegar による内点法の条件数の解析は、線形計画問題において制約行列を摂動することによって行う。従来の研究では行列のすべての要素に独立に摂動を与えている。しかし、現実の問題において制約行列は疎性や対称性の構造を持ち、またそのような構造を活かしたアルゴリズムが盛んに研究されている。このことから、我々は制約式に対して疎性などの構造を保つような摂動を考えることが有効的だと考え、制約式を定義する写像の構造を考慮した条件数の研究を進めており、論文を執筆中である。

この研究をさらに進め、条件数と固有値や特異値などとの関係の解明を目指し、一般の写像に対する構造を考慮した摂動定理の基礎を築く。

3. 研究の方法

(1) 逆関数定理(Metric regularity)の研究では、我々はすでに連続関数空間上の応用上重要な写像に対して定性的、定量的な結果を得ていた。これを突破口として、他の関数空間における性質を研究した。また、連続関数空間は最適化問題において重要な空間であるので、その空間特有の性質もさらに詳細に調べた。

これらの研究の際に、参照頻度の高い解析関連、数理計画関連の書籍を購入し、国内外での研究会やセミナー、国際会議などに参加した。

研究はイスラエル工科大学の Ioffe 教授と共同で行った。特に具体的な関数空間、最適化問題、アルゴリズムに対する研究を重点的に行い、Ioffe 教授には Banach 空間などへ定理を一般化する際に共同研究を行った。共同研究はメールでのやりとりを中心に、国際会議での討論の機会を持つことによって進めた。

(2) 実際に現れる大規模な線形計画問題において制約行列は疎性や対称性などの構造を持つ場合が多く、そのような構造を利用しているアルゴリズムが多い。しかし、最適化問題の安定性解析などに利用される摂動理論は疎性等の構造を利用していない。そこで我々は、疎性を考慮した摂動定理の構築を目指した。

このような研究は行列方程式に対していくつもの研究があったが、ごく近年 Metric regularity の研究から生まれた正則半径の定理と結び付けられ、より一般的な制約式に対する疎性を考慮した摂動の解析が行われるようになった。

我々は部分的な結果を得て、現在論文を執筆中である。

研究は集合値写像の解析の手法を新たにアルゴリズムの計算量解析に取り入れていく。そのため、計算量解析関連、数値解析関連の書籍を重点的に購入し研究を行った。また、国内外のセミナー、研究会などに積極的に参加し情報収集を行い、得られた結果を国際学会などで発表した。

4. 研究成果

(1) ある集合上の最小化問題の解を求めるには、その集合に対する法線ベクトルを求めることが鍵となる。本研究では制約式の距離正則性に注目し、ユークリッド空間上の連続写像によって定義される等式、不等式系の解集合に対する法線ベクトルの公式を与えた。連続最適化問題において、最小限の仮定である連続性のみで公式を得たことに意義があると考えられる。証明には主に劣微分の計算を用いている。

(2) Banach 空間上の写像が距離正則性を持つ場合に、その「良さ」を表わす量、正則性のモジュラス (Modulus of metric regularity) が定義される。本研究では初めて不等式系に対する正則性のモジュラスの等式評価に成功した。証明に際して、既存手法の限界を具体的な反例をあげることで示し、同値ノルムの列を考慮することが鍵となった。

(3) オンラインアルゴリズムの基本問題である通貨交換問題に対して、変分法を応用し効果的なアルゴリズムを求めた。既存アルゴリズムの弱点を補うために、問題をルベーク可積関数空間上の最適化問題として新たな定式化を行い、不連続な最適解 (アルゴリズム) を解析的に求めることに成功した。また従来の結果との関係を調べるためゲーム論的な考察から、ミニマックス問題を考え、その鞍点 (関数と分布の組) も解析的に求めた。本成果では、変分法によるアルゴリズム開発の可能性を示唆している点が意義深いと考える。

(4) (2) の成果を拡張し、閉凸グラフをもつ写像に対する正則性のモジュラスを等式評価することに成功した。閉凸グラフを持つ写像は線形作用素と同様の性質を持つ集合値写像で、非線形不等式系を解析するための基本的な写像である。この写像の正則性のモジュラスは、線形作用素の逆写像のノルムに対応する。証明は凸解析における共役関数と inf-convolution を用いている。

(5) 半無限計画問題に現れる制約に対する正則性のモジュラスを陽的に求めた。その際、実行可能解の有限次元性から Caratheodory の定理を応用して、有限次元空間から無限次元空間への写像を有限次元の間の写像へ変換することに成功したことが証明の鍵となっている。主定理により半無限計画に現れる制約に対する正則性のモジュラスを等式評価することに成功し、その結果、近年話題となっている正則半径の定理を証明した。

(6) (4) の議論を線形不等式系を表す写像に適用し、正則半径の定理が成り立つためのより具体的でシャープな十分条件を得た。その際、具体的にルベーク二乗可積関数空間上の不等式系の反例を挙げ、その十分条件を取り除くことが出来ないことと、そのような性質の悪い不等式系に対しても、(4) で得た公式が成り立つことを示した。

さらにこの結果を連続関数空間上の可微分な非線形不等式系に応用した。ここでは、連続関数空間の双対空間である有界変動関数空間の単位球面の部分集合が汎弱コンパクト性を持つことに注目し、Fan のミニマックスの定理を用いることで、正則性のモジュラスの等式評価と、正則半径の定理が成り立つことを証明している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕 (計 7 件)

- ① H. Fujiwara, K. Iwama, Y. Sekiguchi, Average-Case competitive Analyses for One-Way Trading, Journal of Combinatorial Optimization, in press, 査読有
- ② Y. Sekiguchi, Exact estimates of the regularity modulus for infinite programming, Mathematical Programming, Vol.123, 2010, pp. 253-263, 査読有
- ③ A. D. Ioffe, Y. Sekiguchi, Regularity estimates for convex multifunction's, Mathematical Programming, Vol.117, 2009, pp. 255-270, 査読有
- ④ Y. Sekiguchi, W. Takahashi, Regularity analysis of semi-infinite programming by a general estimates, Proc. 5th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 2009, 181-192, 査読有
- ⑤ H. Fujiwara, K. Iwama, Y. Sekiguchi, Average-Case Competitive Analyses for One-Way Trading, Lecture Notes in Computer Sciences, Vol.5092, 2008, pp. 41-51, 査読有
- ⑥ A. D. Ioffe, Y. Sekiguchi, Exact formulae for regularity estimates, Proc. 4th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 2007, pp.185-198, 査読有
- ⑦ Y. Sekiguchi, W. Takahashi, On regularity of constraint systems with continuous operator, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Vol. 8, 2007, pp. 357-366, 査読有

〔学会発表〕 (計 6 件)

- ① Y. Sekiguchi, Metric regularity and Convexity, 20th International Symposium on Mathematical Programming, 2009 年 8 月 24 日, Gleacher center, The University of Chicago, USA
- ② Y. Sekiguchi, Real ideal and duality related to polynomial optimization, The Sixth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 2009 年 3 月 28 日, 東京工業大学, 東京
- ③ Y. Sekiguchi, Variational methods for currency trading problems, Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, 2008 年 9 月 15 日, くにびきメッセ, 松江
- ④ Y. Sekiguchi, Regularity analysis

- with convexity, World Congress of Nonlinear Analysts, 2008 年 7 月 7 日, Hyatt Grand Cypress Florida, USA
- ⑤ Y. Sekiguchi, Modulus of metric regularity of convex mappings, Second Mathematical Programming Society International Conference on Continuous Optimization, 2007 年 8 月 13 日, MaMaster University, Canada
 - ⑥ Y. Sekiguchi, Regularity analysis on set-valued mappings with closed convex graphs, The Fifth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 2007 年 6 月 3 日, 国立精華大学, 台湾

6. 研究組織

(1) 研究代表者

関口 良行 (SEKIGUCHI YOSHIYUKI)
東京海洋大学・海洋工学部・助教
研究者番号 : 50434890