

## 科学研究費補助金研究成果報告書

平成22年 5月18日現在

研究種目： 若手研究 (B)  
 研究期間： 2007~2009  
 課題番号： 19740062  
 研究課題名 (和文) ポテンシャル解析による非線形偏微分方程式の研究  
 研究課題名 (英文) Studies on nonlinear partial differential equations  
 by potential analysis

## 研究代表者

平田 賢太郎 (HIRATA KENTARO)  
 秋田大学・教育文化学部・講師  
 研究者番号： 30399795

研究成果の概要 (和文) : 滑らかな有界領域において, 非線形不等式を満たす正値優調和関数が適当な境界増大評価を満たすような非線形指数の範囲を明らかにし, 更に半線形楕円型方程式の正値解でポアソン核と比較可能なものの存在を示した. また, 特異型半線形楕円型方程式の正値解が存在するためのディリクレ境界関数に対する十分条件を与えた. ポテンシャル論に関しては, 調和測度が2倍条件を満たすための領域の決定, グリーン関数とマルチン核の積に対する評価, マルチン核の境界挙動に関する結果を得た.

研究成果の概要 (英文) : In a bounded smooth domain, we established a suitable boundary growth estimate for positive superharmonic functions satisfying a nonlinear inequality. Moreover, we proved the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations that are comparable to the Poisson kernel. Also, we gave a sufficient condition for Dirichlet boundary data to guarantee the existence of positive solutions of singular semilinear elliptic equations. In regard to potential theory, we studied a doubling property of harmonic measure, an estimate for the product of the Green function and the Martin kernel, and the boundary behavior of Martin kernels.

## 交付決定額

(金額単位: 円)

	直接経費	間接経費	合計
19年度	1,000,000 円	0 円	1,000,000 円
20年度	1,100,000 円	330,000 円	1,430,000 円
21年度	1,100,000 円	330,000 円	1,430,000 円
年度			
年度			
総計	3,200,000 円	660,000 円	3,860,000 円

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学

キーワード： 実解析, 関数方程式

1. 研究開始当初の背景  
 ポテンシャル論は主にラプラス方程式の解である調和関数や優調和関数の局所的性質, 大域的性質を深く研究する分野である. 一方,

非線形偏微分方程式論では, 星の密度分布を記述するレーン・エムデン方程式などの半線形楕円型方程式の研究が盛んに行われている. 主に, 正値解の存在・一意性に関する研

究であり、解の性質については未解決な問題が多い。この様な方程式の正值解は優調和関数であるため、ポテンシャル論の観点から正值解全体の構造および性質を調べることは興味深い。また、 $p$ -ラプラス方程式などの半線形楕円型方程式の研究が北欧、北米で活発に行われているが、微分作用素が非線形であるため解析が困難であり、関心ある未解決問題は多く残されている。

## 2. 研究の目的

レーン・エムデン方程式や  $p$ -ラプラス方程式などの非線形楕円型方程式の正值解全体の構造および性質について次を解明することが目的である。

- (1) 有界領域におけるレーン・エムデン方程式に対して、境界に特異点をもつ正值解の存在および正值解の境界挙動（特に、境界増大度や非接極限の存在）を考察する。
- (2)  $p$ -ラプラス方程式に関する特異解( $p$ -グリーン関数)の対称性および大域的評価、 $p$ -調和測度の評価、 $p$ -マルチン核の大域的評価などについて研究する。また、 $p$ -調和関数の境界挙動を研究する。

## 3. 研究の方法

研究(1)については、変分法の手法で境界に特異点をもつ正值解の存在を示すのは難しい。なぜなら、ポアソン核は適当なソボレフ空間に属さないからである。そこで、グリーン関数とポアソン核に関わる評価を与え、半線形楕円型方程式に対応する積分作用素の一樣有界性と同程度連続性を示し、シャウダーの不動点定理を用いて解の存在を明らかにすることができた。また、半線形楕円型方程式の正值解の境界増大度については、解をポテンシャル表示したとき、密度関数に対する具体的な制約がないため如何に解析するかが1つの問題点であった。しかし、非線形方程式の特性を用いると、密度関数が逆向きのヘルダー不等式を満たすことを示すことができ、ブートストラップの議論を用いて解決することができた。

研究(2)については、方程式（特に微分作用素）が非線形であるため  $p$ -グリーン関数の対称性を直接示すのは困難である。そこで、特異点付近での挙動、比較評価や境界ハルナック原理などを仮定のもと、一般に非対称なグリーン型関数はどのような形で大域的に

評価できるかを考察した。境界ハルナック原理を用いて  $p$ -調和測度と  $p$ -グリーン関数の関係を導き、上述の大域的評価を適用して  $p$ -グリーン関数の擬対称性、 $p$ -調和測度の評価、 $p$ -マルチン核の増大度の間と同値性を確立することができた。

いずれの研究においても、ポテンシャル論研究集会、日韓共催の実・複素解析会議、日本数学会などで講演を行い、専門家の意見や情報をもとに結果の改善、改良を加え質ある研究に努めた。

## 4. 研究成果

本研究の目的は十分に達成でき、以下の成果を挙げることができた。

- (1) 滑らかな有界領域において、非線形不等式を満たす正值優調和関数の境界増大度と非線形指数の関係について考察した。非線形指数が次元に依存する或る定数以下ならば高々正值調和関数の境界増大度であり、大きいならば幾らでも速く増大する優調和関数が存在することを明らかにした。更に、2次元のときにアルソープとフーバーの結果を考慮して非接極限の存在定理を得た。
- (2) 半線形楕円型方程式の正值解でポアソン核と比較可能なものの存在をポテンシャル論の手法で示した。
- (3)  $p$ -ラプラス方程式に関するグリーン関数の擬対称性、調和測度の評価、マルチン核の増大度の間と同値性を示した。更に、 $p$  が次元に等しい場合に、グリーン関数とマルチン核に対する具体的な大域的評価を与えた。
- (4) 特異型半線形楕円型方程式のディリクレ問題の正值解の存在について考察し、境界関数が小さい時は正值解は存在せず、大きい時は正值解が必ず存在することを明らかにした。
- (5) 外部領域において、松隈型半線形楕円型方程式の正值解の無限遠点での極限の存在を考察し、非線形指数が次元に依存する或る定数より小さいならば極限は存在し、大きいならば極限の存在が保証されないことを明らかにした。

以上が非線形楕円型方程式に関する研究成果であり、当初目的以外の研究(4)、(5)まで行った。更に、ポテンシャル論に関して次の研究成果を得た。

- (6) ファトゥウ・ナイム・ドゥーブの理論を展させ、差集合の極小尖細性とマルチン

核の挙動の関係を明らかにした。具体的応用として、リプシッツ領域のマルチン核の極付近での増大度に関わる結果を得た。

- (7) 複雑な境界をもつ錐領域の頂点と無限遠点のマルチン境界点がただ一つであることを示し、非接領域内の集合の古典的尖細性と極小尖細性の同値性を示した。
- (8) 弱い内部条件を満たす領域において、グリーン核とマルチン核の積に対する具体的な評価を与えた。
- (9) 調和測度が2倍条件を満たすような領域に対する必要十分な幾何学的条件を与えた。
- (10) ヘルムホルツ方程式の正值解の境界挙動に関するリトルウッド型定理を与え、コラニ・テイラーの接近領域の最良性を示した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

- ① K. Hirata, Boundary behavior of solutions of the Helmholtz equation, *Canadian Mathematical Bulletin*, 査読有, Vol. 52, (2009), 555 - 563
- ② K. Hirata, Boundary behavior of superharmonic functions satisfying nonlinear inequalities in a planar smooth domain, *Journal of the Australian Mathematical Society*, Vol. 87, (2009), 253 - 261
- ③ K. Hirata, Limits at infinity of superharmonic functions and solutions of semilinear elliptic equations of Matukuma type, *Potential Analysis*, Vol. 30, (2009), 165 - 177
- ④ K. Hirata, Global estimates for non-symmetric Green type functions with applications to the p-Laplace equation, *Potential Analysis*, Vol.29, (2008), 221 - 239
- ⑤ H. Aikawa, K. Hirata, Doubling conditions for harmonic measure in John domains, *Annales de l'Institut Fourier*, Vol. 58, (2008), 429 - 445
- ⑥ K. Hirata, On the existence of positive solutions of singular nonlinear elliptic equations with Dirichlet boundary conditions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 338, (2008), 885 - 891

- ⑦ K. Hirata, The boundary growth of superharmonic functions and positive solutions of nonlinear elliptic equations, *Mathematische Annalen*, Vol. 340, (2008), 625 - 645
- ⑧ K. Hirata, Estimates for the products of the Green function and the Martin kernel, *Nagoya Mathematical Journal*, Vol. 188, (2007), 1 - 18
- ⑨ K. Hirata, Martin boundary points of cones generated by spherical John regions, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Mathematica*, Vol. 32, (2007), 289 - 300
- ⑩ K. Hirata, Boundary behavior of quotients of Martin kernels, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, Vol. 50, (2007), 377 - 388

[学会発表] (計11件)

- ① K. Hirata, Boundary behavior of superharmonic functions satisfying nonlinear inequalities, The 11<sup>th</sup> Northeastern Symposium on Mathematical Analysis, 2010年2月23日, 北海道大学
- ② 平田賢太郎, 非線形不等式を満たす優調和関数の境界挙動, 2009年度日本数学会東北支部会, 2010年2月20日, 秋田大学
- ③ 平田賢太郎, 非線形不等式を満たす優調和関数の境界挙動, 日本数学会2009年度秋季総合分科会, 2009年9月26日, 大阪大学
- ④ K. Hirata, Boundary behavior of superharmonic functions satisfying nonlinear inequalities, The XXIst Rolf Nevanlinna Colloquium, 2009年9月10日, 京都大学百周年時計台記念館
- ⑤ K. Hirata, Upper and lower estimates for parabolic Green functions in Lipschitz domains, International Workshop on Potential Theory 2009, 2009年9月1日, 北海道大学
- ⑥ 平田賢太郎, Limits at infinity of superharmonic functions and solutions of semilinear elliptic equations of Matukuma type, RIMS 研究集会「ポテンシャル論とその関連分野」, 2009年2月17日, 京都大学数理解析研究所
- ⑦ 平田賢太郎, 非線形不等式を満たす優調和関数に対する調和増大評価, 逆平均値の不等式と Harnack 原理, 2008年度ポテンシャル論研究集会, 2008年11月1日, 秋田カレッジプラザ

- ⑧ 平田賢太郎, 非線形不等式を満たす優調和関数の境界挙動に関する注意, 日本数学会 2008 年度春季年会, 2008 年 3 月 23 日, 近畿大学
- ⑨ K. Hirata, Boundary behavior of superharmonic functions satisfying nonlinear inequalities in the unit disk, The 11<sup>th</sup> Conference on Real and Complex Analysis, 2008 年 2 月 18 日, 広島大学
- ⑩ 平田賢太郎, 平面領域において非線形不等式を満たす優調和関数の非接境界極限, 2007 年度ポテンシャル論研究集会, 2007 年 11 月 2 日, 広島大学
- ⑪ 平田賢太郎, Dirichlet 境界条件を満たす非線形楕円型方程式の正值解の存在, 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会, 2007 年 9 月 23 日, 東北大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

平田 賢太郎 (HIRATA KENTARO)

秋田大学・教育文化学部・講師

研究者番号 : 30399795

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号 :

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号 :