

平成 22 年 4 月 9 日現在

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007～2010

課題番号：19740063

研究課題名（和文）ある種のスペクトルを保存する Banach 環上の作用素とその摂動の安定性

研究課題名（英文）Certain spectra preserving maps on Banach algebras and the stability of their perturbation

研究代表者

三浦 毅（MIURA TAKESHI）

山形大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：90333989

研究分野：関数解析学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：Banach 環，スペクトル保存写像，摂動と安定性

## 1. 研究計画の概要

コンパクト Hausdorff 空間  $K$  上の複素数値連続関数全体を  $C(K)$  とする。  $K$  が第一可算であるとき、  $C(K)$  からそれ自身への全射  $T$  が条件 (\*)  $(T(f)T(g))(X) = (fg)(X)$  ( $f, g \in C(K)$ ) 及び  $T(1) = 1$  をみたせば、  $T$  は等距離同型写像であることが Molnar によって示された。本研究では、Molnar が導入した値域に関する条件(\*)を次の側面から考察することによりその本質を探ることを目的とし、さらに条件(\*)から見た Banach 環の構造を解明する。

- (1) “値域”を“スペクトルの一部分”や“ノルム”に置き換えたとき、同様の結果が得られるか。
- (2)  $T$  の摂動の安定性はあるか。
- (3) 非可換 Banach 環に対しても、同様の結果が得られるか。

## 2. 研究の進捗状況

Molnar によって示された結果は、単位的半単純可換 Banach 環上のスペクトル保存写像に対して成り立つことを、関数環理論を用いることにより示した。一方で、単位元の存在は、この定理において本質的であることも分かった。実際、多元環としては同型でなくともスペクトル保存写像が存在する例を具体的に構成した。スペクトル条件(\*)をさらに弱め、スペクトル半径  $r(\cdot)$  に関する条件  $r(T(f)T(g) + c) = r(fg + c)$  を考察することにより、  $T(1) = 1$ ,  $T(i) = i$  であるとき、  $T$  は Banach 環としての同型写像であることを示した。ただし  $c$  は 0 でない定数である。ここで用いた手法を詳細に調べることにより、関数の積のスペクトル半径よりも、商のスペク

トル半径が本質的な役割を果たしていることが分かった。このことから Banach 環の間の全射を考察するのではなく、可逆元全体のなす乗法群やその部分群の間の全射  $T$  で、さらに  $r(T(f)T(g)^{-1} + c) = r(fg^{-1} + c)$  をみたくも調べる必要が生じた。ただし  $c$  は  $g$  の逆元である。このとき  $T$  の形を完全に決定した。さらに  $T(1) = 1$ ,  $T(i) = i$  のとき、  $T$  は Banach 環としての同型写像であることが直ちに従う。これらの研究成果により、これまで独立に研究されてきた Molnar の結果の拡張を、統一的に扱うことが可能となった。現在は  $g^{-1}$  を写像  $T(g)$  の特別な場合と見ることにより  $r(S(f)T(g) + c) = r((f)(g) + c)$  をみたくも写像の組  $S, T, c$  の構造を調べる研究に発展している。

## 3. 現在までの達成度

おおむね順調に進展している。

Molnar によって導入されたスペクトル保存写像の研究は、スペクトルをノルムあるいはスペクトル半径に置き換えても、同様の結果が得られること及びそれらの結果は半単純可換 Banach 環やある種の非可換 Banach 環に対して成り立つことが示されている。これらの研究は当初の計画以上に進展している。しかしながら、摂動の安定性に関する研究は十分な結果を得られているとはいえないので、今後精力的に調べなければならない。

## 4. 今後の研究の推進方策

これまでの研究では、演算として積や商を考察してきたが、それらの代わりに和や差のス

ペクトルあるいはスペクトル半径を考えることはごく自然な発想であり、今後の課題である。またスペクトルよりも弱い条件としてスペクトル半径の場合を考察し、Molnarの結果を一般化したが、Banach環のノルムの場合には調べられていないので詳しく研究する必要がある。ノルムの研究の進展は、摂動の安定性問題への重要な手がかりともなり得る。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計30件)

Osamu Hatori, Kazumi Hino, Takeshi Miura and Hirokazu Oka, *Peripherally monomial-preserving maps between uniform algebras*, *Mediterr. J. Math.* **6** (2009), 47--60. 査読有

Takeshi Miura and Dai Honma, *A generalization of peripherally-multiplicative surjections between standard operator algebras*, *Cent. Eur. J. Math.*, **7** (2009), 479--486. 査読有  
Osamu Hatori, Takeshi Miura and Hiroyuki Takagi, *Spectra preserving maps between commutative Banach algebras*, *J. Math. Anal. Appl.* **326** (2007), 281--296. 査読有

[学会発表](計16件)

Takeshi Miura, *A note on the stability of Volterra type integral equation*, The Twelfth International Conference on Functional Equations and Inequalities, 2008/9/8 (Poland, Bedlewo)

Takeshi Miura, *Peripherally multiplicative surjections between uniform algebras*, Special Session on Banach Algebras, Topological Algebras, and Abstract Harmonic Analysis of the American Mathematical Society sectional meeting, 2009/4/26 (San Francisco State University)

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：

出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

[その他]