

機関番号：12608

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2007 年～2009 年

課題番号：19740065

研究課題名 (和文)

集合値解析の手法を用いた均衡問題の研究

研究課題名 (英文)

Equilibrium problem using the method of set-valued analysis

研究代表者

木村 泰紀 (KIMURA YASUNORI)

東京工業大学・大学院情報理工学研究科・助教

研究者番号：20313447

研究成果の概要 (和文)：

本研究では、工学や経済学等への応用として重要な非線形問題を扱い、それらの相互関係および近似解を求めるためのアルゴリズムについて研究をした。とくに均衡問題と変分不等式問題およびその関連問題について、集合値解析的手法を用いて研究をし、問題間の相互関係の特徴付け、解の近似に関する新しい手法等を提案した。

研究成果の概要 (英文)：

In this research, we deal with some nonlinear problems which have been applied to other research fields such as engineering, economics, and others. We investigated their relationship and algorithms for finding their solutions. We focused on the equilibrium problems and variational inequality problems and found their close relationship. We also proposed some approximation methods of the solutions to these problems by using the methods of set-valued analysis.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,000,000	0	1,000,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,300,000	390,000	2,690,000

研究分野：非線形解析学・集合値解析学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：均衡問題、リゾルベント、Mosco 収束、変分不等式問題、極大単調作用素

1. 研究開始当初の背景

均衡問題とは、Banach 空間上で定義された 2 変数関数に対し、この関数を用いて定義されたある不等式系をみたす点を求める問題であり、凸最適化問題や鞍点問題、非協力ゲームにおけるナッシュ均衡等、数学のみならず多くの分野に関連した問題をより一般的な形で定式化した問題である。非線形解析学においても、不動点問題、変分不等式問題、相補性問題等の重要な問題を一般化したも

のになっている。1994 年に Blum、Oettli によってこのことが包括的に指摘されて以来、均衡問題の重要性が注目を集め、現在に至るまで多くの数学者によって研究がなされてきた。

一方、1970 年代以降に飛躍的な発展を遂げた集合値解析は、数学のさまざまな分野への応用がなされている。中でも非線形関数解析学、とくに凸解析学への応用はもっとも大きな成果をあげているものの一つであり、経

済学や工学等、数学以外の分野へのさらなる応用が広くなされている実用的な研究である。

研究をきっかけに、均衡問題の解の存在定理や、点列を用いた解の近似定理等が活発に研究されており、主に国外において興味深い結果が発表されている。

一方、国内においては最近になっていくつかの論文は見られるものの、本格的な研究については発展途上の段階であった。

均衡問題に関する過去の結果の多くに共通する特徴として、証明の手法が変分不等式問題に関する定理の証明手法と類似しているということがある。この事実から、均衡問題と変分不等式問題の間には、前者が後者の一般化であるということ以上の深い関連があると予想される。しかしながら、このような特徴があるにも関わらず、現段階において両者の関係についての満足できる結果は得られていなかった。

2. 研究の目的

本研究では、数ある非線形問題の中でも均衡問題と変分不等式問題との関係に焦点を絞り、各問題に対する特徴づけ、両者が同値となるための条件等の周辺問題を包括的にあつかう。さらに、変分不等式問題に対する既存の結果の均衡問題への応用、実際に問題を解く際に必要な理論等についても研究対象とする。具体的には以下の通りである。

- (1) 均衡問題および変分不等式問題に関する集合値解析の立場からの理論構築
- (2) 均衡問題と変分不等式問題との類似点の考察
- (3) 均衡問題と変分不等式問題との関係の解明
- (4) 解の近似定理等への応用と計算機シミュレーション方法の確立

3. 研究の方法

本研究における最も重要な特色は、集合値解析の手法を用いたアプローチをおこなうという点にある。この理論的な視点を踏まえ、さらに数学的な解決だけではなく、均衡問題の近似解を得るアルゴリズムを計算機によってシミュレートする方法を確立することも試みる。数学的な理論だけではなく現実的な問題の解決も視野に入れることで、研究の意義はより深まると考えられる。

以下に具体的な研究の方法を述べる。

- (1) 本研究で必要な基礎的概念に対する集合値解析的アプローチの模索と関連する成果の発展拡充を試みる。
- (2) 変分不等式問題およびその周辺の問題について検証し、均衡問題との関係について具体的な結果を得る。とくに両問題が同値に

なるための条件について、具体的問題への適用が可能な条件を探る。

(3) 変分不等式問題に対する解への収束定理が均衡問題についても適用可能かどうかを検証する。既存の収束定理だけではなく、均衡問題との関係からも新たな収束定理の可能性を探り、均衡問題の解の近似について新たな知見を得る。

(4) 均衡問題に含まれる種々の非線形問題を計算機を用いて解く際の実装方法について検証する。個々の問題に特有の条件に対して、より効率のいい解法が存在する可能性についても探る。

(5) 計算機への実装を考慮し、収束定理を検証する。実用上で不十分な点を明確にした上で、数学的な解決が可能かどうかを考察し、問題の再設定、計算法の見直し、定理の再構成などをはかる。

(6) 上記の結果をもとに計算機による数値実験をおこなう。理論検証とともに実用性の程度も考察する。

4. 研究成果

本研究課題における研究成果に挙げられるものとして、第一にバナッハ空間上で定義された単調作用素に対する零点問題と、2変数関数に対する拡張された均衡問題との関係に関する成果がある。

この結果においては、一定の条件の下で均衡問題と変分不等式問題の相互の同値性を証明し、同値な問題として互いを結びつける対応を具体的に示すことに成功した。

単調作用素の零点問題とは、実バナッハ空間からその共役空間への多価写像が単調性という性質をもつ場合に、像が0を含むような定義域の点を求める問題である。この問題は、変分不等式問題や不動点問題、凸最適化問題等を抽象化した問題として知られており、多くの応用をもつ重要な問題である。一方、均衡問題は、バナッハ空間の閉凸集合上で定義された2変数関数によるある種の不等式系を同時にみたす点を求める問題であり、そこで扱う関数については、通常凸性や連続性に関するいくつかの性質が仮定される。単調作用素の零点問題と同様、均衡問題も変分不等式問題や不動点問題、凸最適化や鞍点問題等、多くの問題を含むことで知られている。単調作用素の零点問題と均衡問題はともに多くの非線形問題を含んでおり、既存の研究においてもそれらの類似性が指摘されていた。しかしながら、相互の問題の関係について具体的に調べた研究については知られていなかった。本論文では、均衡問題の値域を正負の無限大を含む拡張された実数へと一般化し、さらに解の集合を変えずに定義域を空間全体と拡張したものを考えることで、零点問題との相互関係を解明することに成功した。本論

文で得られた結果は次のように要約できる。
(1) 拡張された均衡問題は、いくつかの仮定の下で、極大単調作用素の零点問題に対応し、対応する問題同士の解集合は一致する。

(2) 極大単調作用素の零点問題のうち、作用素の実効定義域が閉集合であるものについては、拡張された均衡問題と対応している。対応する均衡問題は(1)における仮定をみたし、解集合も一致する。

(3) (2)で考えた極大単調作用素と、対応する均衡問題を与える2変数関数はリゾルベントという写像を共有する。

(4) さらに仮定を付け加えると、(1)の対応が(2)の逆対応となる。

これらの結果から、均衡問題は、解の近似を得るために通常用いられる仮定の下で単調作用素の零点問題に完全に含まれることがわかる。とくに、リゾルベント写像を用いたさまざまな解の近似法については、単調作用素の零点問題の方がより本質的な問題であり、本論文の結果から、均衡問題は零点問題のサブクラスに過ぎないということが判明した。

第二に、均衡問題および変分不等式問題に密接な関わりがある増大作用素の零点問題の近似解法に関連する結果が挙げられる。計算機シミュレーションのための実装方法を視野に入れた上での理論および実験のために必要な問題の考察として、計算誤差の評価に関する結果が得られた。

従来の研究では、点列を求める際の計算誤差の許容範囲については、1976年にRockafellarが用いた仮定と同様に非常に厳しい条件のままであるという点で、さらなる改良の余地があると考えられる。実際、ここで仮定されている「誤差ベクトル列のノルムの無限和が有限値を取る」という条件は、数値計算等で起こり得る誤差では非現実的であり、このまま実際の計算に適用することは不可能である。

上記の問題点を改良するために、収束のために必要な条件の考察をおこなった。問題解決のための主たる手法は二つあり、一つは漸化式に現れる凸結合の係数列に対する条件の緩和、もう一つは漸化式で用いる係数を決定する際に、それまでに得られている点列の情報を用いることで、収束に関してより効率のよい係数列を生成するという方法である。

前者の凸結合係数列の緩和に関する部分は2009年からの一連の論文による考察で考察で、リゾルベントの計算の際に生じる誤差を $O(1/n^s)$ ($s > 0$)程度に抑えられれば、近似列の解への弱収束が保証されるという結果を得た。

一方、後者の手法である、現時点までの点列の情報を用いて次の点の生成に用いる凸結合の定数を決定する手法も弱収束するこ

とが証明された。従来の弱収束定理では、凸結合定数列の無限和が発散する場合において点列の弱収束が保証されていたが、本論文の結果は、写像や初期点に対応して然るべき凸結合係数列を取ることによって、和が発散しない場合においても弱収束する点列を生成することができる場合があることを示唆している。さらに、係数列の取り方は具体的な形で与えられているため、実際の数値計算等においても利用可能なものとなっている。

なお、本論文の主定理は作用素の列に対する結果として証明されているため、他の関連する写像列の問題に対しても応用可能である。

第三に、非拡大写像族に準ずる性質をもった写像族、具体的にバナッハ空間におけるrelatively nonexpansive写像と呼ばれる写像の列や、ヒルベルト空間におけるquasicontractive写像と呼ばれる写像の列に対する共通不動点の近似列を生成する手法に関する一連の結果が挙げられる。本研究では、ヒルベルト空間上で定義された非拡大写像族に対する共通不動点近似の手法として提唱された収縮射影法を中心に考察し、空間や係数列、写像族に仮定されている様々な条件を緩和することに成功した。一連の結果では、本研究課題で取り扱う均衡問題およびそれに関連の深い変分不等式問題に対して定義されるリゾルベント写像等を一般化したものを取り扱っている。このことから、これらの結果は均衡問題を含む非線形問題の解法の進歩に一定の貢献をするものと考えられる。

いずれの結果においても、研究の手法として本研究課題の特徴である集合値解析の手法を用いることで近似点列の弱収束性および強収束性を証明しており、本研究課題の目指す形での研究成果を意図通りに得ることができたという点で、当初の計画に沿った研究が達成されたものと評価できる。

なお、本研究をより発展させた内容の研究課題として、2010年度より採択された文部科学省科学研究費補助金基盤研究(C)の研究課題「集合値解析の手法を用いた非線形解析学の研究」があり、2009年度までに本研究によって達成されなかった課題についてはこちらで継続的に扱うこととなった。具体的には、計算機実験を踏まえた理論の構築およびその考察と、具体的な問題に対する計算機シミュレーションをおこなうことなどが挙げられる。これらについては、計算機実験に携わる研究者を共同研究者に迎えることによって、より高度な手法を模索することが期待されている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

(1) Y. Kimura and K. Nakajo, Some characterizations for a family of nonexpansive mappings and convergence of a generated sequence to their common fixed point, Fixed Point Theory and Applications, 2010, 16 pages, Article ID 732872, 2010, 査読有.

(2) Y. Kimura, Further improvement of a coefficient condition for a weakly convergent iterative scheme, Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications, 71, e2023-e2027, 2009, 査読有.

(3) Y. Kimura and W. Takahashi, On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 357, 356-363, 2009, 査読有.

(4) Y. Kimura, K. Nakajo, and W. Takahashi, Strongly convergent iterative schemes for a sequence of nonlinear mappings, Journal of Nonlinear and Convex Analysis 9, 407-416, 2008, 査読有.

(5) Y. Kimura and W. Takahashi, A generalized proximal point algorithm and implicit iterative schemes for a sequence of operators on Banach spaces, Set-Valued Analysis, 16, 597-619, 2008, 査読有.

(6) K. Aoyama, Y. Kimura, and W. Takahashi, Maximal monotone operators and maximal monotone functions for equilibrium problems, Journal of Convex Analysis, 15, 395-409, 2008, 査読有.

[学会発表] (計 11 件)

(1) Y. Kimura, Shrinking projection methods for families of nonlinear mappings, 2009 Workshop on Nonlinear Analysis and Optimization, November 26, 2009, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.

(2) Y. Kimura, On the shrinking projection methods for nonlinear mappings, The Sixth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2009), March 30, 2009, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan,

(3) Y. Kimura, Coefficient conditions for a weakly convergent iterative scheme, International Symposium on Nonlinear Analysis and Optimization 2009 (ISNAO2009), February 10, 2009, Pukyong National University, Busan, Korea.

(4) Y. Kimura, A generalization of the proximal point algorithm and a countable family of nonlinear mappings, Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (NAO-Asia2008), September 16, 2008, Kunibiki Messe, Matsue, Japan.

(5) Y. Kimura, Convergence of an iterative scheme generated by a sequence of nonlinear operators, World Congress of Nonlinear Analysts (WCNA2008), July 2, 2008, Hyatt Grand Cypress Resort, Orlando, FL, USA.

(6) Y. Kimura, Iterative methods for approximation of a solution to nonlinear operator inclusions, ICNPAA2008 Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, June 27, 2008, University of Genoa, Genoa, Italy.

(7) Y. Kimura, Weak convergence of an iterative scheme with a weaker coefficient condition, International Conference on Modeling, Computation and Optimization (ICMCO-08), January 10, 2008, Indian Statistical Institute, Delhi, India.

(8) Y. Kimura, A sequence of resolvents and set-convergence, Japan-Thailand Joint Seminar on Fixed Point Algorithms in Optimization, September 7, 2007, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan.

(9) Y. Kimura, Monotone operators and equilibrium problems in Banach spaces, The 8th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications (ICFPTA2007), July 16, 2007, Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

木村 泰紀 (KIMURA YASUNORI)

東京工業大学・大学院情報理工学研究科・助教

研究者番号 : 20313447