

平成21年 5月15日現在

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007～2008

課題番号：19740071

研究課題名（和文） 時間遅れをもつ方程式の解の大域的性質とスペクトル解析

研究課題名（英文） Global property of solutions of delay equations and spectral analysis

研究代表者

松永 秀章（MATSUNAGA HIDEAKI）

大阪府立大学・工学研究科・准教授

研究者番号：40332960

研究成果の概要：本研究では時間遅れをもつ方程式の解の大域的性質とスペクトル解析に関する研究を行い、(1) 特定の項にのみ時間遅れをもつ線形微分方程式系の零解の漸近安定性、および(2) 無限の時間遅れをもつ関数微分方程式系の解の漸近同値性について、新しい研究成果が得られた。また、(1) の研究成果を特定の項にのみ時間遅れをもつ或る数理モデルに応用し、従来見逃されていた解の漸近的性質における時間遅れの影響を解明することができた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	0	900,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,700,000	240,000	1,940,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：時間遅れ，微分方程式，差分方程式，漸近安定性

## 1. 研究開始当初の背景

自然科学，工学や経済学において，現象の変化が現在の状態だけでなく，過去の状態にも依存する現象が数多くみられる。それらの現象を数学的にモデル化すると，過去の影響を考慮した連続モデルと離散モデルに大別される。前者は時間遅れをもつ微分方程式（関数微分方程式）で記述される。一方，後者は時間遅れをもつ差分方程式（関数差分方程式）で与えられる。両者を合わせて，時間遅れをもつ方程式と呼ぶことにする。

さて，時間遅れの重要性がいち早く認識されたのは数理生態学であった。1970年代から，時間遅れをもつ生態系モデルを対象に，

その解の大域的性質（安定性・有界性・周期性等）が国内外で盛んに研究されてきた。しかし，これらの研究成果と具体的な生態系モデルに対する数値シミュレーション結果とを比較すると，しばしば大きなギャップがある。この第一の理由は，時間遅れをもつ微分方程式や差分方程式に対する最適なリャプーノフ関数を構成することが非常に難しいので，十分すぎる安易な前提条件の下でしか，解の大域的性質が議論されてこなかったためだと考えられる。したがって，時間遅れをもつ方程式の解の大域的性質は十分解明されたとは言い難く，改善すべき問題点が多く残されているのが現状である。

## 2. 研究の目的

本研究では数値シミュレーションを活用しながら、時間遅れをもつ微分方程式および差分方程式の解の新しい構造や大域的性質を系統的に解析し、それらを数学的に厳密に証明することを目的とする。具体的には次の2つの研究テーマを解明したい：

- (i) 特定の項にのみ時間遅れをもつ線形微分方程式系の零解の漸近安定性
- (ii) 無限の時間遅れをもつ非線形関数微分方程式系の解の漸近同値性

## 3. 研究の方法

(i) 『線形系の零解が漸近安定  $\Leftrightarrow$  特性方程式のすべての根の実部が負』なので、特性根の解析により、零解が漸近安定であるための具体的な必要十分条件を導出・証明する。時間遅れと係数のパラメータが多いため、煩雑な場合分けが予想されるが、数式処理ソフトによる視覚情報も十分活用し、複素平面上の特性根の分布を詳細に解析する。また、入念な数値シミュレーションを実行するため大学院生に研究補助をお願いする。

(ii) 関数微分方程式系に付随する作用素のスペクトル解析により、非線形関数微分方程式系の解の漸近挙動を考察し、対応する線形方程式系の解との漸近同値性を示す。関数解析的アプローチが必要になるので、関数微分方程式論におけるスペクトル解析のエキスパートである岡山理科大学の村上悟教授と引き続き共同研究を行う。先の村上教授との共同研究 (Matsunaga & Murakami (2005)) により、無限の時間遅れをもつ関数差分方程式系に対する同種の問題を既に肯定的に解決している。後は連続型力学系と離散型力学系の類似点および相違点に注意して、証明を完了させる。

## 4. 研究成果

(1) 1つの時間遅れをもつ2次元線形微分方程式系および線形差分方程式系の零解が漸近安定であるための必要十分条件をそれぞれ、係数行列の行列式、トレースと時間遅れのパラメータを用いて具体的に与えた。また、関連する時間遅れをもつ微分方程式および差分方程式の漸近安定条件と未解決問題を提示した。

(2) 非有界な時間遅れをもつ非線形スカラー微分方程式の零解が大域的吸収的であるための十分条件を導出し、従来の結果 (Matsunaga et al. (1999)) を改良かつ一般化することができた。改良点は対象となる微分方程式の非線形性において単調性の仮定

を外せたことで、解の大きさをじかに不等式で評価し、すべての解が0に収束することを証明した。

(3) 2つの時間遅れをもつ2次元線形差分方程式系の解の漸近挙動を完全に分類した。特に、解がある特定の定点や周期点に漸近する場合、その漸近先を係数行列、2つの時間遅れおよび初期値を用いて具体的に与えることができた。証明は特性方程式の根の解析と行列のスペクトル分解の理論を適用した。

(4) 無限の時間遅れをもつ非線形関数微分方程式系の解の漸近挙動を、対応する線形方程式系に付随する作用素のスペクトルを用いて、特徴付けることができた。これは常微分方程式系の解の漸近同値性を与えた Perron の定理 (1929) および有限の時間遅れをもつ関数微分方程式系の解の漸近同値性を与えた Pituk の定理 (2005) の拡張に相当する。

(5) 特性方程式の根の解析により、1つの時間遅れと2つの定数係数をもつ2次元線形微分方程式系に対して、時間遅れに依存する漸近安定条件と時間遅れに依存しない漸近安定条件を導出した。特に、時間遅れに依存する漸近安定条件において、零解が漸近安定であるための時間遅れの範囲を具体的に与えた。これにより、従来見逃されていた零解の漸近安定性における時間遅れの影響を完全に解明した。

(6) 非対角成分に時間遅れをもつ2次元線形微分方程式系の零解が漸近安定であるための必要十分条件を、時間遅れに依存する漸近安定条件と時間遅れに依存しない漸近安定条件に分けて具体的に与えた。これは方程式系の係数に前提条件を仮定して得られた Yan & Chu (2006) の結果を本質的に改善している。また、2次元方程式系に対する研究成果を  $n$  次元方程式系へ拡張することもできた。

(7) 対角成分に時間遅れをもつ2次元線形微分方程式系の零解が漸近安定であるための具体的な必要十分条件を導出した。特に、対角成分の時間遅れを増加させると、零解が漸近安定と不安定と有限回くり返しながら、最終的に不安定になる性質 (Stability switches) を数学的に完全に証明した。これは Stability switches が起こらないと主張している Yan & Li (2006) の結果と相反するものであり、彼らの定理および証明が間違っていることを指摘した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

- ① H. Matsunaga, Stability switches in a system of linear differential equations with diagonal delay, *Appl. Math. Comput.*, vol. 212, pp. 145-152 (2009) 査読有.
- ② M. Suzuki and H. Matsunaga, Stability criteria for a class of linear differential equations with off-diagonal delays, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, vol. 24, pp. 1381-1391 (2009) 査読有.
- ③ H. Matsunaga, Delay-dependent and delay-independent stability criteria for a delay differential system, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 136, pp. 4305-4312 (2008) 査読有.
- ④ K. Matsui, H. Matsunaga and S. Murakami, Perron type theorems for functional differential equations with infinite delay in a Banach space, *Nonlinear Anal.*, vol. 69, pp. 3821-3837 (2008) 査読有.
- ⑤ K. Matsui and H. Matsunaga, Perron type theorems for nonlinear functional difference equations, 数理解析研究所講究録「現象からの関数方程式」no. 1547, pp. 94-99 (2007) 査読無.
- ⑥ H. Matsunaga, The limits of the solutions of a linear delay difference system, *Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polynomials: Proceedings of the International Conference*, World Scientific, pp. 404-411 (2007) 査読有.
- ⑦ H. Matsunaga, Global attractivity for a nonlinear differential equation with unbounded delay, *Inter. J. Qualitative Theory Differential Equations Appl.*, vol. 1, pp. 1-7 (2007) 査読有.
- ⑧ H. Matsunaga, Exact stability criteria for delay differential and difference equations, *Appl. Math. Lett.*, vol. 20, pp. 183-188 (2007) 査読有.

[学会発表] (計10件)

- ① 松永秀章, 特定の項に時間遅れをもつ方程式の漸近安定性, 研究集会「微分方程式の

定性的理論ワークショップ」, 大阪府立大学, 2009年3月3日.

- ② 松永秀章, 橋本浩樹, 原 惟行, ある線形微分方程式系の漸近安定性に対する対角成分の時間遅れの影響, 日本数学会 2008年度秋季総合分科会, 東京工業大学, 2008年9月24日.

- ③ 松永秀章, Stability switches in a linear differential equation with diagonal delay, 研究集会「札幌医科大学における微分方程式セミナー」, 札幌医科大学, 2008年9月2日.

- ④ H. Matsunaga, Delay-dependent and delay-independent stability criteria for delay differential equations, *International Conference on Differential and Difference Equations*, Veszprem, Hungary, July 14-17, 2008.

- ⑤ 松井和幸, 松永秀章, 村上 悟, Perron type theorems for functional differential equations with infinite delay in a Banach space, 日本数学会 2008年度年会, 近畿大学, 2008年3月23日.

- ⑥ 松永秀章, 高橋千尋, 時間遅れをもつ2次元微分方程式系の解の振動性, 研究集会「微分方程式の定性的理論ワークショップ」, 徳島大学, 2008年3月2日.

- ⑦ 松永秀章, 中野佑亮, 非線形微分方程式に対するペロン型の定理について, 研究集会「微分方程式の定性的理論ワークショップ」, 徳島大学, 2008年3月1日.

- ⑧ 鈴木正克, 松永秀章, 原 惟行, Stability criteria for a class of linear differential systems with off-diagonal delays, RIMS研究集会「関数方程式論におけるモデリングと複素解析」, 京都大学数理解析研究所, 2007年11月6日.

- ⑨ 橋本浩樹, 松永秀章, 原 惟行, Asymptotic stability for a linear differential system with distributed delays in diagonal terms, RIMS研究集会「関数方程式論におけるモデリングと複素解析」, 京都大学数理解析研究所, 2007年11月5日.

- ⑩ 松永秀章, 時間遅れをもつ方程式の解の漸近的性質について (招待講演), 日本数学会 2007年度秋季総合分科会, 東北大学, 2007年9月21日.

〔図書〕(計1件)

① 原 惟行, 松永秀章著, 「複素解析入門」,  
共立出版 (2007).

〔その他〕

ホームページ等

[http://www.ms.osakafu-u.ac.jp/~hideaki/  
index-j.html](http://www.ms.osakafu-u.ac.jp/~hideaki/index-j.html)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

松永 秀章 (MATSUNAGA HIDEAKI)

大阪府立大学・工学研究科・講師

研究者番号 : 4 0 3 3 2 9 6 0