

機関番号：33907

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2007～2009

課題番号：19740076

研究課題名 (和文) 変動指数をもつソボレフ関数のポテンシャル論的研究

研究課題名 (英文) Potential theoretic study of Sobolev functions with variable exponent

研究代表者

二村 俊英 (FUTAMURA TOSHIHIDE)

大同大学・教養部・准教授

研究者番号：90387605

研究成果の概要 (和文)：変動指数をもつルベグ空間上で極大作用素の有界性を示し、ソボレフの不等式、ハーディーの不等式、指数不等式について新しい知見を得た。さらに、最大値・最小値原理を満たす単調関数で変動指数をもつソボレフ空間に属する関数の境界挙動に関する結果を得ることができた。

研究成果の概要 (英文)：We prove the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operators for Lebesgue spaces with variable exponent. As applications, we discuss Sobolev's type inequality, Hardy's type inequality and Trudinger's type inequality. Further, we deal with a boundary behavior of monotone Sobolev functions with variable exponent.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	900,000	0	900,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,100,000	360,000	2,460,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：実解析

## 1. 研究開始当初の背景

関数の境界挙動に関する研究は、「単位円上の有界な正則関数は円周上のほとんどすべての点で非接極限值をもつ」という Fatou の定理が出発点である。その後、Tsuji 氏が、有限な面積積分をもつ正則関数に対して Fatou の定理が成り立つことを示した。正則関数の議論を一般次元の領域で展開するときには、正則関数の自然な拡張である調和関数や等角写像の拡張として H. Grötzsch によって導入された擬等角写像などを扱うことになる。平面の擬等角写像は、Beltrami の微分方程式を満たし、高次元においてもある

種の重み付き非線形楕円型方程式を満たす。そのため、偏微分方程式の解に関する研究が重要となるが、偏微分方程式論において、解の存在や正則性を論じるとき、ソボレフ関数は極めて重要な道具になる。

古典的なソボレフ関数は、ユークリッド空間上の領域で定義された関数で、弱微分がルベグの可積分関数である。そのようなソボレフ関数のソボレフ型定理の研究が精力的に行われてきた。近年、一般の距離空間上でポアンカレの不等式を満たすソボレフ関数の研究が微分幾何学、確率論など応用を期待して、フィンランド学派の数学者を中心に進

められて、新しい展開を見せている。

一方、変動する指数について、従来のルベーク空間論およびソボレフ空間論を展開する試みが、電気流動学などの応用をにらんで精力的に行われている。変動指数をもつ関数空間の研究は、1931年のOrliczの研究から始まり、1990年代初期のO. KováčikとJ. Rákosníkの研究を経て、2004年に発表されたL. Diening氏の論文を契機にこの分野の研究が大きく発展した。

調和関数の性質である最大値・最小値原理を満たす単調関数の境界挙動に関する研究は、水田氏、Manfredi氏、Villamor氏等によって行われてきた。これらは、変動指数をもつソボレフ空間に属する単調関数に関してはまだ知られてなく、変動指数をもつ関数空間の研究の発展に伴って、これらの研究が発展することが期待される。

## 2. 研究の目的

(1) 2004年に発表されたL. Dieningの論文”Maximal functions on generalized  $L^{p(\cdot)}$  spaces, Math. Inequal. Appl. 7, 2004, p. 245-253”によって、Hardy-Littlewood極大作用素が変動指数をもつルベーク空間上で有界となる変動指数の連続性に関する条件が与えられた。この条件は、log-Hölder連続と呼ばれ、この条件のもとで、変動指数をもつルベーク空間の研究が大きく発展した。変動指数の連続性に関する条件を緩和したもとで、Hardy-Littlewood極大作用素の有界性を調べる。

(2) 変動指数の連続性に関する条件を緩和したもとで、リースポテンシャルに対するソボレフの不等式、ヘルダー連続性、Trudingerの不等式を調べる。

(3) 調和関数の性質の中で最大値・最小値原理に着目して、Lebesgueは1907年に単調関数を定義した。調和関数のほかに擬等角写像の成分関数やある種の楕円型偏微分方程式の解が単調関数であることが現在までわかっている。通常ソボレフ空間に属する単調関数の境界挙動の研究をもとに、変動指数をもつソボレフ空間に属する単調関数の境界挙動を調べる。とくに、フラクタル境界をもつ領域の単調関数の境界挙動を調べる。

(4) 多重調和関数や優多重調和関数の孤立特異点の挙動を調べる。

## 3. 研究の方法

平成19年度は、一定指数のソボレフ空間に属する単調関数の境界挙動の研究をもとに、log-Hölder連続な変動指数をもつソボレフ空間に属する単調関数の境界挙動に関する研究を広島大学の下村氏と共同で行った。単調関数の境界挙動の研究と並行して、連続性の条件を緩和した変動指数をもつ関数空間に関する研究を広島大学の水田氏、下村氏と共同で行った。また、単位円上の優重調和関数のリース分解に関する研究を広島大学の水田氏等と行った。

平成20年度以降は、平成19年度に引き続き、変動指数をもつ関数空間の研究を行い、リースポテンシャルに関するソボレフ型定理の研究を行った。また、変動指数の連続性の条件を緩和したもとで、単調関数の境界挙動に関する研究などを行った。

平成21年3月6日～3月8日、平成22年3月8日～3月10日、平成22年9月6日～9月8日、平成23年3月5日～3月7日の4回にわたり、大同大学においてポテンシャル論若手セミナーを開催し、秋田大学の平田氏、大分大学の野野氏等とともに、研究の相互理解と発展の場を設けた。

## 4. 研究成果

(1) 最大値・最小値原理を満たす単調関数の弱微分がルベークの $L^p$ 関数であるとき、 $p > n-1$ であれば、調和関数が満たす平均値不等式と同様な不等式が成り立つ。この不等式と球の連鎖を利用することによって、関数の2点の間の差を評価することができる。この方法を利用して、log-Hölder連続な変動指数をもつソボレフ空間に属する単調関数のリンドレーフ型定理を与えた。

(2) L. Dieningによって与えられた変動指数の連続性に関する条件であるlog-Hölder連続は変動指数をもつルベーク空間 $L^{p(\cdot)}$ 上でHardy-Littlewood極大作用素を有界にする。この条件は、連続性の意味で、Hardy-Littlewood極大作用素が $L^{p(\cdot)}$ 上で有界である最良のものであることは知られている。変動指数の連続性を緩和したもとで、極大作用素は $L^{p(\cdot)}$ からそれ自身への有界性は言えない。このとき、極大作用素は $L^{p(\cdot)}$ か

ら空間  $X$  への有界作用素となるような空間  $X$  の特徴付けをした。リースポテンシャルは積分領域を  $x$  を中心とした半径  $r$  の開球とその補集合の二つの部分に分解することができる。Hedberg の方法によって、前者は極大関数で評価し、後者はヘルダーの不等式を使って評価することによって、リースポテンシャルの評価式ができる。この方法を利用して、リースポテンシャルに対するソボレフの不等式、ハーディーの不等式、指数不等式に関する成果を得た。

(3) ラプラス作用素を 2 回繰り返して正となる関数である重調和関数のリース分解定理を与えた。特に、単位球面上の優重調和関数の球面積分平均が境界との距離の関数で評価されるとき、優重調和関数を一般化したポテンシャルと重調和関数の和で分解できることを示した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① T. Futamura, K. Kitaura, Y. Mizuta, A Montel Type result for super-polyharmonic functions on  $\mathbf{R}^N$ , Potential Anal., 査読有, Vol.34, No.1, 2011, pp.89-100.
- ② T. Futamura, Y. Mizuta, T. Shimomura, Integrability of maximal functions and Riesz spaces of variable exponent, J. Math. Anal. Appl., 査読有, Vol.366, No.2, 2010, pp.391-417.
- ③ T. Futamura, K. Kitaura, Y. Mizuta, Riesz decomposition for superbiharmonic functions in the unit ball, Hokkaido Math. J., 査読有, Vol.38, No.4, 2009, pp.683-700.
- ④ T. Futamura, P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta, T. Shimomura, Variable exponent spaces on metric measure spaces, World scientific, 2009, pp.107-121.

⑤ T. Futamura, K. Kitaura, Y. Mizuta, Isolated singularities, growth of spherical means and Riesz decomposition for superbiharmonic functions, Hiroshima Math. J., 査読有, Vol.38, No.2, 2008, pp.231-241.

⑥ T. Futamura, T. Shimomura, Lindelöf theorems for monotone Sobolev functions with variable exponent, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 査読有, Vol.84, No.2, 2008, pp.25-28.

[学会発表] (計 1 件)

- ① 二村俊英, 変動指数をもつ関数空間におけるリースポテンシャルのハーディー型不等式, 日本数学会年会, 2008 年 3 月 28 日, 東京大学

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：  
 発明者：  
 権利者：  
 種類：  
 番号：  
 出願年月日：  
 国内外の別：

○取得状況 (計◇件)

名称：  
 発明者：  
 権利者：  
 種類：  
 番号：  
 取得年月日：  
 国内外の別：

[その他]

ホームページ等

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

二村 俊英 (FUTAMURA TOSHIHIDE)  
 大同大学・教養部・准教授  
 研究者番号：90387605

##### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3)連携研究者  
( )

研究者番号：