

平成 21 年 6 月 12 日現在

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2007～2008

課題番号：19740083

研究課題名（和文） モノドロミー保存系のハミルトン構造

研究課題名（英文） Hamiltonian structure for monodromy systems

研究代表者

菊地 哲也（KIKUCHI TETSUYA）

東京大学・大学院数理科学研究科・特任研究員

研究者番号：00374900

研究成果の概要：パンルヴェ方程式を含む常微分方程式系を、アフィン・リー環という代数系から構成される偏微分方程式系（ソリトン方程式）の相似簡約として構成し、多くの方程式系のもつ対称性（アフィン・ワイル群による変換やハミルトン形式による記述など）を統一的に扱えることを示した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	800,000	0	800,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,500,000	210,000	1,710,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：可積分系、ソリトン方程式、パンルヴェ方程式

## 1. 研究開始当初の背景

非線形偏微分方程式で記述されるソリトン系およびそのリダクションとして得られる非線形常微分方程式であるパンルヴェ方程式について、アフィン・リー環で記述される対称性の視点により研究を行っている。

パンルヴェ方程式やその差分化、 $q$  差分化により得られる一連の方程式は、その豊富な対称性のため、解や方程式自身の構造に関する解析的な研究にとどまらず、位相的場の理論や代数幾何、微分幾何、ランダム行列など非常に多くの分野にも研究対象として現れ、今後も様々な応用、発展が続くと思われる。

ここでリダクションと述べているのは、偏微分方程式からその自己相似解の満たす常微分方程式を求めることであるが、多くのソリトン方程式の解がリダクションによりパンルヴェ方程式の解となることがアプロヴィッツ、ラマニ、シーガーらにより発見され、逆散乱変換で解ける非線形偏微分方程式とパンルヴェ性をみたく常微分方程式との間になんらかの関係があると考えられるようになった(1970年代)。その後、神保道夫、三輪哲二、上野喜三男によるスペクトル保存変形とモノドロミー保存変形を記述する線形方程式の対応(1980年代)や、野海正俊、山田

泰彦によるアフィン・ワイル群対称性を用いたパンルヴェ方程式の研究(1990年代)などにより

これらの方程式系やその特殊解が、対称性を表す代数構造のレベルで対応することが明らかにされつつある。特に野海・山田の与えたパンルヴェ方程式の一般化であるアフィン・ワイル群対称性をもつ常微分方程式系は、ドリンフェルト・ソコロフ階層とよばれるソリトン系のリダクションとして構成することができる。

本研究代表者菊地はこの対応に注目して、池田岳、筧三郎との共同研究において、考えるソリトン系のクラスを一般化ドリンフェルト・ソコロフ階層と呼ばれるソリトン系まで拡張し、最初の成果として変形矢嶋・及川方程式とパンルヴェ V 型方程式の関係を明らかにした(2003年)。さらにこの研究を押し進めて、

- (1) 一般化ドリンフェルト・ソコロフ階層のさらなる一般化。
- (2) パンルヴェ方程式のアフィン・ワイル群対称性のソリトン系への持ち上げ。
- (3) 相似簡約の Lie 代数的定式化、の3つの成果を得、筧三郎との共著論文として発表した(2004年)。

## 2. 研究の目的

上記の筧三郎との共同研究の応用として、次の成果が得られた：

- (1)  $A_1^{(1)}$ 型アフィン・リー環の対称性をもつ二種類のソリトン方程式階層のうち、微分型非線形シュレーディンガー方程式階層の神保、三輪、上野によるモノドロミー保存変形の研究や、グラマティコス、ラマニによる離散パンルヴェ方程式の研究を含む形での定式化を与えた。
- (2) それまでソリトン方程式のリダクションとしては得られていなかったパンルヴェ VI 型方程式の構成に成功した(2007年)。
- (3) 神保・坂井による  $q$  差分パンルヴェ VI 型方程式が、ソリトン方程式の差分化として再構成されることを示した(2006年)。

このような応用がある理由として、我々の研究における方程式の定式化が一般的であることを挙げられる。

そこで、本研究では、パンルヴェ方程式を含むモノドロミー保存系の対称性、特にハミルトン構造に注目し、この構造とソリトン方程式の持つ対称性との関連を代数的な視点により明らかにすることを目標とする。

## 3. 研究の方法

非線形の方程式であるパンルヴェ方程式が持つ豊富な構造を見つける方法として、単独2階の方程式を連立1階系で表す際に、従属変数の多項式で表されるハミルトニアンによるハミルトン系で表示できること、および線形方程式のモノドロミー保存変形を記述する方程式として表せることが挙げられる。一方、ソリトン方程式系は無数個の保存則をもち、またスペクトル保存変形方程式としての記述をもつ。パンルヴェ方程式とソリトン方程式の対応では、スペクトル保存とモノドロミー保存の方程式まで拡張できるが、保存則の関係は明らかではない。そこで、ハミルトン系としてのパンルヴェ方程式とソリトン系の間に幾何学的な対応があるのではないかという問題を考えることは自然かつ重要である。

また、パンルヴェ方程式のハミルトン系としての構造は、対応するモノドロミー保存変形方程式から導かれるものと、方程式のパンルヴェ性に基いた解析により導かれるものがあり、両者で得られるハミルトン方程式は一致している。

このように発見の背景にあるものは地道な計算であり、代数的な道具が整備されつつある状況でも、やはり個々の例に対する計算を積み重ね、そこで得られるデータを基にこれらの構造とソリトン方程式の背後にある表現論的な対称性の対応を考えることになる。

## 4. 研究成果

- (1) アプロヴィッツ・カウプ・ニューエル・シーガーによる、2次行列係数の線形微分方程式の両立条件として定義されるソリトン方程式系(AKNS階層)に、さらに反自双対ヤン・ミルズ(ASDYM)方程式が両立するような偏微分方程式系に制限条件を加えることにより、神保・三輪による6種類のパンルヴェ方程式に付随する線形問題のうち5つが統一的方法で得られることを示した。このうちパンルヴェ III, IV が AKNS 階層の相似簡約で得られることは神保・三輪により、パンルヴェ VI と ASDYM の関係はメイソン・ウッドハウスらにより知られているが、ここではこれらの結果を含む形で一般的な定式化を行い、2次元非線形シュレーディンガー方程式の相似簡約でパンルヴェ V

- 型方程式が得られることまで明らかにすることに成功した。筈三郎との共同研究。
- (2) 上の成果の応用として、トレイシー・ウイダムによるパンルヴェ方程式の行列積分解がソリトン方程式の特殊解から再構成できることを示した。
  - (3) ソリトン方程式のハミルトニアンと、ソリトン方程式の保存量にあたる関数が相似簡約で対応していることを、上に述べた AKNS-ASDYM 階層の場合に示した。
  - (4) 戸田場方程式の一般化である変形ポールマイヤー・ルンド・レジエ方程式の相似簡約としてパンルヴェ III 型方程式を構成した。
  - (5) 双有理変換で記述されるパンルヴェ III 型方程式の全ての対称性がソリトン方程式の持つ対称性からの簡約として得られることを示した。パンルヴェ III 型方程式の場合、ワイル群対称性の現れ方が他のパンルヴェ方程式とは違う形であったため、発見が遅れていたのだが、ここに来て初めて明らかになった。
  - (6) パンルヴェ III 型方程式のハミルトニアンと変形ポールマイヤー・ルンド・レジエ方程式の保存量との対応を記述した。
  - (7) 変形ポールマイヤー・ルンド・レジエ方程式を含むソリトン方程式の階層と上記(1)の反自己双対ヤン・ミルズ方程式を含む階層とのとの関連を明らかにした。この結果と上記(5)により、ひとつのソリトン方程式系に対する対称性から多くのモノドロミー保存系のもつ対称性を統一的に説明することができ、さらなる一般化が期待できる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計1件)

菊地哲也, 変形 Pohlmeier-Lund-Regge 方程式から見た Painleve III 型方程式, 九州大学応用力学研究所研究集会報告集, 20ME-S7, 査読無, 29--34, 2009 年

〔学会発表〕(計9件)

菊地哲也, 変形 Pohlmeier-Lund-Regge 方程式と Painleve III 型方程式, 日本数学会 2009 年度年会, 2009 年 3 月 29 日, 東京大学駒場キャンパス  
 筈三郎, 菊地哲也, AKNS-ASDYM 階層とパンルヴェ方程式, 微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題, 2009 年 2 月 6 日, 京都大学数理解析研究所  
菊地哲也, 変形 Pohlmeier-Lund-Regge 方程式から見た Painleve III 型方程式, 非線形波動の数理と物理, 2008 年 11 月 6 日, 九州大学応用力学研究所  
菊地哲也, NLS-ASDYM 階層とパンルヴェ方程式, 日本数学会 2008 年度年会, 2008 年 3 月 23 日, 近畿大学  
菊地哲也, 2+1 次元 NLS 階層の相似簡約, 古典解析セミナー, 2008 年 2 月 21 日, 大阪大学理学部  
菊地哲也, 2+1 次元 NLS 階層の相似簡約, 可積分系ウインターセミナー2008, 2008 年 2 月 19 日, KKR 湯沢ゆきぐに  
菊地哲也, 2+1 次元 NLS 階層とパンルヴェ方程式, 神戸可積分系セミナー, 2008 年 1 月 16 日, 神戸大学自然科学研究科  
菊地哲也, 戸田階層とパンルヴェ方程式, 2007 年度表現論シンポジウム, 2007 年 11 月 14 日, 休暇村讃岐五色台  
菊地哲也, ソリトン方程式の保存則と相似簡約, 2007 函数方程式論サマーセミナー, 2007 年 8 月 7 日, ビレッジ安曇野

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

なし

6．研究組織

(1)研究代表者

菊地 哲也(KIKUCHI TETSUYA)

東京大学・大学院数理科学研究科・特任研究  
員

研究者番号：00374900

(2)研究分担者

(3)連携研究者