

研究種目：若手研究 (B)
 研究期間：2007～2009
 課題番号：19740086
 研究課題名 (和文) トロピカル幾何学と可積分系

研究課題名 (英文) Tropical geometry and integrable systems

研究代表者

野邊 厚 (NOBE ATSUSHI)
 千葉大学・教育学部・准教授
 研究者番号：80397728

研究成果の概要 (和文)：トロピカル楕円曲線の加法を用いて2次元区分双線形写像力学系の8パラメータ族を構成しその一般解を求めた。また、超離散化の手続きを通して、このような力学系と楕円曲線の加法の定める2次元双有理写像力学系の18パラメータ族であるQRT写像との対応関係を明らかにした。同様の手法をトロピカル楕円曲線の倍角写像の定める可解カオス力学系に対しても適用し、一般解および楕円曲線の倍角写像から導かれる有理写像力学系との対応関係を明らかにした。さらに、線形化可能なセルオートマトンの族が存在することを示し、周期境界条件の下での初期値問題に対する周期公式を導出した。

研究成果の概要 (英文) : We construct an 8-parameter family of two-dimensional bi-piecewise linear maps in terms of the addition of the points on tropical elliptic curves, and obtain the general solution for each member of the family. Through the ultradiscretization procedure, we associate the family with an 18-parameter family of two-dimensional birational maps called the QRT map including its general solutions. Similarly, applying such technique to solvable chaotic maps induced from the duplication of points on tropical elliptic curves, we obtain their general solution and clarify the correspondence to the rational maps induced from the duplication of points on elliptic curves. Moreover, we show that there exists a family of cellular automata each of which has a property called the linearizability. Then we obtain a formula concerning the fundamental period with respect to the time evolution of the family imposing periodic boundary conditions.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	0	1,000,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	2,900,000	570,000	3,470,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：大域解析学

キーワード：解析学, 関数方程式論, 数理物理学, トロピカル幾何, 可積分系

1. 研究開始当初の背景

(1) 超離散系とは、位置座標、時間変数、場の量などが全て離散的な量で表される力学系であり、中でも保存量、厳密解などが具体的に構成できるものは超離散可積分系と呼ばれる。超離散可積分系の研究は 1990 年の高橋・薩摩によるソリトンセルオートマトン (SCA) の発見に端を発する。彼らは既知のソリトン方程式とは独立に SCA を発見し、そのソリトンの振る舞いについて報告した。さらに 1996 年の時弘らによる超離散化手法の発見により SCA (もしくはその拡張である箱玉系) とソリトン方程式の直接的対応関係が示され、研究が急速に進展した。超離散化とは加法・乗法・減法を含む等式をトロピカル半体上の等式へ書き換える操作であり、この手法を通して超離散可積分系のもつ様々な性質が調べられてきた。

(2) 一方、Krichever, Novikov, 塩田らの研究によってソリトン方程式の準周期解と閉 Riemann 面との関係が明らかにされており、ソリトン方程式は Jacobi 多様体上の直線運動であるという幾何学的解釈が成り立つ。また、佐藤理論によると、KP 階層のソリトン解全体は無限次元 Grassmann 多様体をなす。しかし、このようなソリトン方程式の幾何学に対応する超離散可積分系の幾何学についてはほとんど何も分かっていなかった。トロピカル幾何学とは、トーリック幾何や組合せ論、代数幾何などの接点から生まれた新しい幾何学であり、トロピカル半体上の区分線形多項式 (トロピカル多項式) により定義される代数多様体 (トロピカル多様体) を考察の対象とする。トロピカル多様体に対しては、古典的代数多様体と同様に、Bezout の定理、Riemann-Roch の定理などの類似が成り立つことが知られている。また、Groebner 基底との関係も指摘されており、計算代数との関連も興味深い。さらに、アメーバを通して自然に超離散化と結びつくことが知られている。トロピカル幾何学の研究は始まったばかりであり、今後の進展が期待される。

2. 研究の目的

(1) 本研究の目的は、超離散可積分系をトロピカル多様体上の力学系として捉え、その幾何学的意味を明らかにし、超離散系にお

ける可積分性の概念を確立することである。そのために、トロピカル楕円曲線の群構造について詳しく調べ、超離散可積分系との関係を明らかにする。

(2) また、楕円曲線の倍角写像の定める力学系は一般解をもつカオス系、すなわち可解カオス系になることが知られているが、トロピカル楕円曲線においても同様にその倍角写像の定める力学系を構成する。さらに、その一般解を求め、このような力学系は可解カオス系であることを示す。これら結果が得られれば、超離散系においても連続・離散系と同様に力学系の幾何学的解釈が成り立ち、超離散系における可積分性やカオス性の概念が確立すると期待される。

3. 研究の方法

(1) トロピカル楕円曲線については、通常の楕円曲線と同様の群構造の存在が Viegeland により示されていた。しかし、通常の楕円曲線と異なり、群構造が入るのはその一部に限られ、この群構造が入る部分が実は超離散 QRT 系の不変曲線として現れる多角形に他ならない。この対応関係から超離散 QRT 写像がトロピカル楕円曲線の群構造の定める写像と同値であることを示した。また、QRT 写像の一般解はテータ関数を用いて記述されるため、テータ関数に対して超離散化を適用し、超離散 QRT 写像の一般解を構成した。これらの過程において数多くの計算を数式処理ソフトウェアにより実行した。

(2) 楕円曲線の倍角写像から可解カオス系が構成できることは知られていたため、対応するトロピカル楕円曲線の倍角写像を求め、区分線形写像で与えられる可解カオス系を構成しようと試みた。しかし、楕円曲線のトロピカル化が必ずしもトロピカル楕円曲線とはならないという困難に遭遇した。そこで、数式処理ソフトウェアなどを活用し、様々な楕円曲線に対して上記の試みを行い、Hesse の標準形と呼ばれる楕円曲線に辿り着いた。この楕円曲線はトロピカル化と相性が良いため、これを研究対象とすることで可解カオス系に関する様々な研究を効率よく行うことができた。

(3) ルール 154 と呼ばれるセルオートマトンは周期境界条件のもとでその時間発展に対

して可逆であることが知られていた。初期条件を様々に変化させその時間発展を計算することで、時間発展に対する基本周期を推測し、共同研究者との議論を通して、基本周期に関する公式を導出した。ここでも数式処理ソフトウェアを積極的に利用した。また、ここでの議論をもとに線形化可能という性質をもつセルオートマトンの族が存在することを代数的に示した。

4. 研究成果

(1) 可逆エレメンタリーセルオートマトン (ECA) のいくつかのルールは、その初期配置の適切な分割により、有限体上のある線形系に帰着されることを示した。このような可逆 ECA ルールの時間発展は本質的に二次対称群の作用と見なせる。また、これらのルールは線形化可能であるため、その初期値問題を解くことができる。さらに、より一般に n 次対称群の作用を考えることで、新しい可逆 CA のクラスである線形化可能 CA を構成し、その基本周期に関する公式を導出した。可積分性の必要条件である可逆性に注目することでこのような性質の良い CA を発見した例はこれまであまり知られておらず画期的である。

(2) トロピカル楕円曲線を用いて超離散 QRT 写像のトロピカル幾何学的意味を明らかにした。すなわち、超離散 QRT 写像の不変曲線はトロピカル楕円曲線の一部分と見なせることを示し、その関係を用いて、超離散 QRT 写像はトロピカル楕円曲線の群構造の定める力学系に他ならないことを導いた。これは QRT 写像とは楕円曲線の加法の定める力学系であるという既知の事実の自然なトロピカル化に他ならない。さらに、Abel-Jacobi 写像を用いて、超離散 QRT 写像をトロピカル楕円曲線に附随するヤコビ多様体上で線形化し、その基本周期に関する公式を導出した。また、超離散楕円テータ関数を用いて、初期値問題に対する厳密解を構成した。超離散 QRT 写像の性質を明らかにしたこと他に、超離散可積分系の解析に対するトロピカル幾何学的手法の有効性を示したことにも本研究の意義がある。

(3) 凹 9 角形を不変曲線にもつ 2 次元区分線形周期写像である Brown 写像は超離散 QRT 写像とある直線に関する折り返しの合成に他ならないことを示した。このような観点に立つと、Brown 写像はある Jacobi 多様体上の平行移動であることが自然に導かれ、その初期

値問題の一般解が超離散テータ関数を用いて与えられる。

(4) Jacobi の sn 関数の倍角公式に附随する 1 次元可解カオス写像 (Schroder 写像) を超離散化し、1 次元区分線形可解カオス写像を構成した。この写像はテント写像に他ならないが、それはあるトロピカル楕円曲線の倍角公式の 1 次元射影と見なせることを示し、その幾何学的意味を明らかにした。また、超離散テータ関数を用いて、その初期値問題の一般解を構成した。

(5) 楕円曲線の標準形の一つである、Hesse の 3 次曲線を自然にパラメトライズするレベル 3 テータ関数の加法公式を導出した。特に、その変数を特殊化して得られる倍角公式に着目し、それを用いて 2 次元有理写像力学系を構成した。このような力学系はその初期値問題が一般解をもつカオス力学系であることを示し、レベル 3 テータ関数を用いて一般解を具体的に構成した。また、この倍角公式の超離散化を通して、トロピカル Hesse 3 次曲線の倍角公式を導出し、それに附随する区分線形写像力学系を構成した。さらに、このような力学系もその初期値問題が一般解をもつカオス力学系であることを示し、区分線形周期関数を用いて具体的に一般解を構成した。ここで用いた区分線形周期関数はレベル 3 テータ関数の超離散化であり、テータ関数のモジュラー変換を工夫することで、解の定性的性質を保ったままでの超離散化が可能であることを示した。これは超離散化における「負の問題」に対する一つの答えになっていると考えられる。

(6) 有理楕円曲面の加法に附随する力学系である QRT 写像と、その底空間としての射影空間に作用するモジュラー変換との合成で与えられる 2 次元双有理写像力学系について考察し、いくつかの具体例を構成した。このような力学系は一般に QRT 写像よりも次数の高い保存量をもち、射影空間におけるモジュラー変換により楕円曲面の特異ファイバーの置換が引き起こされる点が特徴的である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

- ①. Hironori Tanaka, Junta Matsukidaira, Atsushi Nobe and Teruhisa Tsuda, ``Constructing two dimensional integrable mappings which possess invariants of high degree'', RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B13 (2009) 75-84
- ②. Kenji Kajiwara, Masanobe Kaneko, Atsushi Nobe and Teruhisa Tsuda, ``Ultradiscretization of a solvable two-dimensional chaotic map associated with the Hesse cubic curve'', Kyushu Journal of Mathematics, 査読有, 63 (2009) 315-338
- ③. Kenji Kajiwara, Atsushi Nobe and Teruhisa Tsuda, ``Ultradiscretization of solvable one-dimensional chaotic maps'', Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 査読有, 41 (2008) 395202
- ④. Atsushi Nobe, ``Ultradiscrete QRT maps and tropical elliptic curves'', Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 査読有, 41 (2008) 125205
- ⑤. Atsushi Nobe and Fumitaka Yura, ``Linearizable cellular automata'', Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 査読有, 40 (2007) 7159-7174

[学会発表] (計 2 2 件)

- ①. 梶原健司, 金子昌信, 野邊厚, 津田照久, 「Hesseの3次曲線に附随する可解カオス力学系の超離散化」, 超幾何方程式研究会 2010 神戸大学 2010年1月5日
- ②. Atsushi Nobe, ``Tropical curves, integrable maps and solvable chaos'', Workshop ``Crystals and Tropical Combinatorics'', Kansai Seminar House, Kyoto (Japan) 27 August (2008)

[図書] (計 1 件)

- ①. Atsushi Nobe (Editor), ``Expansion of Integrable Systems'', RIMS Kokyuroku Bessatsu B13 (2009)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

野邊 厚 (NOBE ATSUSHI)
 千葉大学・教育学部・准教授
 研究者番号：80397728

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者 ()

研究者番号：