

機関番号：12401

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2007 ~2010

課題番号：19740087

研究課題名 (和文) 量子力学に現れる非線形波動方程式の初期値問題

研究課題名 (英文) The Cauchy problem for the nonlinear wave equations of quantum mechanic

研究代表者 町原秀二

(MACHIHARA SHUJI)

埼玉大学・教育学部・准教授

研究者番号：20346373

研究成果の概要 (和文)：

津田谷公利氏との共同研究で非局所的な作用をもつ非線形項を含む非線形 Dirac 方程式の初期値問題の適切性および散乱現象を調査した。初め同方程式を高次元で取り扱い尺度不変の議論より得られる臨界指数の Sobolev 空間での解決を得た。その後、空間 2 次元で同等の解決を得た。

また津川光太郎氏、中西賢次氏との共同研究で空間 1 次元 Dirac-Klein-Gordon 方程式初期値問題の適切性を得た。同方程式においては適切性を与える Sobolev 空間の指数の集合の補集合では不適切も得ることができこの問題の最終決着を与えた。

研究成果の概要 (英文)：

With Kimitoshi Tsutaya, we have obtained the time local well posedness for the nonlinear Dirac equation with some nonlocal nonlinear terms. Our result was critical in the sense of the scaling invariance for Sobolev norms. We first solved the problem in higher space dimensions, and later we solved the problem in 2 dimension.

With Kenji Nakanishi and Kotaro Tsugawa, we have obtained the time local and global wellposedness for the Dirac-Klein-Gordon equation in 1 space dimension. We also have obtained illposedness for the same problem. This means we completely solved this problem.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,300,000	0	1,300,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総計	3,100,000	540,000	3,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数方程式の大域理論、非線形現象

1. 研究開始当初の背景

総じて非線形波動方程式と呼ばれる各非線形微分方程式初期値問題の適切性の問題は国内外合わせて多くの数学者が取り組む問題として注目を浴びてきた。

微分方程式の初期値問題の適切性とは

一、解の存在
二、解の一意性
三、解の初期値に対する連続依存性
の三つの性質のことである。この三つを全て揃えて初めてその問題が適切と呼ぶことができる。またこのうち一つでも成立しない場合はその問題が不適切と呼ぶ。

微分方程式初期値問題の適切性の問題においてその解を捕まえる Sobolev 空間の指数を減らす競争がある。より低い指数の Sobolev 空間に属する関数は滑らかではないためその取り扱いが難しく数学的価値が上がる。または、扱う方程式が量子力学や工学などにおいて議論されるものなのでその分野から見ればより広いクラスの関数を取り扱えることはやはり価値があることである。

問題の適切性を与える Sobolev 空間のより低い指数を目指す研究は研究者同士の分かりやすい勝敗の指標になっていることも注目される理由である。ここでもし問題の適切性と不適切性で Sobolev 空間の指数を分類することができる、つまりある値より大きいときは適切でその値より小さいときは不適切というように指数の範囲を二分できる、そのときその問題は完全に決着がついたと言うことができる。

数年前は一般論で様々な方程式を議論することができたが、近年では各方程式に合わせたそれぞれの対応が求められる。

2. 研究の目的

非局所的な作用をもつ非線形項を含む非線形 Dirac 方程式の初期値問題を空間次元が 3 以上で取り扱う。この空間次元の制限は証明に使われるメインの道具であるストリッカーツ評価がうまく機能するための技術的要請である。

非局所的な作用をもつ非線形項を含む非線形 Dirac 方程式の初期値問題を空間 2 次元で取り扱う。波動方程式のストリッカーツ評価が使えないために Klein-Gordon 方程式の

ストリッカーツ評価を応用する。

Dirac-Klein-Gordon 方程式の初期値問題の適切性を空間 1 次元で取り扱う。同問題は先行論文も多く競争がある。より低い指数の Sobolev 空間で得たい。また同時に非適切性についても調査する。

3. 研究の方法

空間高次元非局所的な作用をもつ非線形項を含む非線形 Dirac 方程式の初期値問題においては線形評価には標準のストリッカーツ評価を用いる。非線形評価としてヘルダーの不等式、ヤングの不等式、そしてハーディ・リトルウッド・ソボレフの不等式を用いる。また線形評価と非線形評価の両評価の総合的取り扱いにも注目する。

空間 2 次元非局所的な作用をもつ非線形項を含む非線形 Dirac 方程式の初期値問題においては線形評価には前述の Klein-Gordon 方程式のストリッカーツ評価を用いる。非線形評価には同様のヘルダーの不等式、ヤングの不等式、そしてハーディ・リトルウッド・ソボレフの不等式を用いる。

空間 1 次元 Dirac-Klein-Gordon 方程式の初期値問題においては所謂ブルガンの手法を用いる。取り扱う Sobolev 空間の指数が負であるために線形評価、非線形評価ともにフーリエ変換を用いた計算が主となる。また先行論文の議論がうまく働かないところには新しいアイデアが必要である。方程式の解を線形の部分とそれ以外に分離してそれぞれに別の関数空間を設定する。

また同問題においては非適切性も議論する。解の分離による線形部分ではない部分は線形部分より性質の良い空間に属することが分かるのでそれら空間同士のバランスの乱れを利用する。

4. 研究成果

津田谷公利氏との共同研究で非局所的な作用をもつ非線形項を含む非線形 Dirac 方程式初期値問題の適切性をまず空間次元が 3 以上で得た。解の空間は尺度不変性で得られるベストの指数の Sobolev 空間である。この成果は論文になり専門雑誌にて公表済みである。

その後同氏と引き続き共同研究を行い空間2次元でも非局所的な作用をもつ非線形項を含む非線形Dirac方程式初期値問題の適切性を得ることができた。この成果もすでに論文として纏めることができ、専門雑誌にて公表済みである。

津川光太郎氏、中西賢次氏との共同研究でDirac-Klein-Gordon方程式初期値問題を空間1次元において適切性を得た。これは既存結果を大幅に改良したものである。まずDirac方程式の解の属する空間のSobolev指数がこれまで $-1/4$ より大きかったのに対し、我々は $-1/2$ まで下げることができた。これは前述の線形解の部分とそれ以外の部分で解を分離し対応する関数空間を別々に設定したことが成功の鍵となった。またさらに我々は全く別のアプローチでも同等の結果を得ることができた。それは新しい双線形の評価を作ったことである。これはこれまでのブルガンノルムに改良を加えた新しい関数ノルムを設定したことによる。そしてこの新しい双線形評価を用いると空間1次元で2次の非線形項を持つ非線形Dirac方程式の初期値問題においてもこれまでの既存の結果を大幅に改良することができた。

また我々は同方程式の同初期値問題において不適切の結果も得ることができた。これは具体的にはSobolev空間の指数を下げ過ぎると初期値がその空間に属すると仮定しても時刻が一瞬でも過ぎれば解がその空間に属さないことを示せることが分かった。この証明においても解の線形部分とそれ以外の別々対応の評価の議論が用いられている。

これら適切性と不適切性の結果により同問題の完全決着を与えることができた。この成果は論文に纏めることができ既に専門雑誌において公表済みである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

1. Machihara, S., Nakanishi, K. and Tsugawa, K., Well-posedness for nonlinear Dirac equations in one dimension, *Kyoto J. Math.*, 50 (2010) 2, 403—451.

2. Machihara, S. and Tsutaya, K., Scattering theory for the Dirac equation of Hartree type in 2+1 dimensions, *Nonlinear Anal.*, 71 (2009) 12, e2437-e2441.
3. Machihara, S. and Tsutaya, K., Scattering theory for the Dirac equation with a non-local term, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 139 (2009) 4, 867-878.
4. Machihara, S. and Omoso, T., The explicit solutions to the nonlinear Dirac equation and Dirac-Klein-Gordon equation, *Ric. Mat.*, 56 (2007) 1, 19-30.
5. Machihara, S., Dirac equation with certain quadratic nonlinearities in one space dimension, *Commun. Contemp. Math.*, 9 (2007) 3, 421—435.
6. Machihara, S., The Cauchy problem for the 1-D Dirac-Klein-Gordon equation, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 14 (2007) 5-6, 625—641.
7. Machihara, S., Bilinear estimates for the transport equations, *Asymptotic analysis and singularities---hyperbolic and dispersive PDEs and fluid mechanics*, 47 (2007) 189-196.

[学会発表] (計5件)

1. Machihara, S., Maximal operators associated to the wave equation, Analysis seminar at the School of Mathematics, University of Edinburgh, エジンバラ大学、2011年1月24日.
2. Machihara, S., Hardy inequalities and maximal operators associated to the wave equation, Seminar talk at the School of Mathematics, University of Birmingham, バーミンガム大学、2010年11月17日.
3. 町原秀二、空間1次元Dirac-Klein-Gordon方程式の初期値問題について、青葉山勉強会(第2回)「分散型方程式の解の正則性」、東北大学青山記念会館、2009年8月4日.

研究者番号：

4. 町原秀二、Dirac-Klein-Gordon 方程式の初期値問題について、第 7 回出羽セミナー、山形大学理学部 2009 年 6 月 13 日。
5. 町原秀二、空間 1 次元 Dirac-Klein-Gordon 方程式の初期値問題について、RIMS workshop 非線形波動及び分散型方程式の研究、京都大学数理解析研究所、2007 年 5 月 23 日。

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

出願年月日：

国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

取得年月日：

国内外の別：

[その他]

ホームページ等

<http://sucra-rd.saitama-u.ac.jp/search/profile.do?lng=ja&id=OCSpumDp>

6. 研究組織

(1) 研究代表者 町原 秀二

(MACHIYARA SHUJI)

埼玉大学・教育学部・准教授

研究者番号：20346373

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

