

機関番号：17102

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2007～2010

課題番号：19740088

研究課題名 (和文) 作用素環論における自己同型群及び群作用の研究

研究課題名 (英文) Research of automorphism groups and group actions in the Theory of operator algebras

研究代表者

増田 俊彦 (MASUDA TOSHIHIKO)

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：60314978

研究成果の概要 (和文)：

私は単射的因子環の自己同型群及び群作用の研究をおこなった。特に単射的因子環への従順群の作用の分類理論を研究した。戸松玲治氏との共同研究で、離散従順カツツ環の単射的因子環への作用を分類し、双対定理を経由することによって、コンパクト群の極小作用の単射的因子環への分類をおこなった。また離散従順群の単射的因子環への作用の分類の Evans-岸本の intertwining argument を用いた統一的な証明を与えた。またこの議論を一般化することによって、部分因子環への離散従順群作用の分類定理や、外部的な離散従順群の作用の分類定理を証明した。

研究成果の概要 (英文)：

I studied automorphism groups and group actions on injective factors. In particular, I studied classification theory of amenable group actions on injective factors. With R. Tomatsu, I classified actions of discrete amenable Kac algebras, and minimal actions of compact groups on injective factors through the duality theorem. I also found a unified proof of classification of discrete amenable group actions on injective factors by Evans-Kishimoto's intertwining argument. By generalizing this argument, I also gave the classification of discrete amenable group actions on subfactors, and outer actions of discrete amenable groups on injective factors.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	0	900,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,000,000	630,000	3,630,000

研究分野：作用素環論

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：単射的因子環、自己同型群、群作用、分類

## 1. 研究開始当初の背景

単射的因子環への群作用の分類の研究は Connes の自己同型の分類に始まって、多数の人々の研究により、離散従順群の作用の分類

が完成されていたが、連続群の作用の分類については分類が未だなく、部分的な結果がいくつか知られていた程度であった。特に重要な場合はコンパクト群であり、部分因子環理

論との関係からもいろいろ研究されていたが、分類の観点からは幾つかの結果が予告されていたものの、証明は与えられず未解決のままであった。

また上述した離散従順群の作用についても、分類結果自体は統一的に書けるものの、証明は単射的因子環の型に大きく依存したケースバイケースといった議論で、長大かつ難解なものであった。

## 2. 研究の目的

上記のような状況を踏まえ、まず離散従順群の作用の分類のより統一的な扱いを研究することを第一の目的とした。

また離散群について取り扱いやすいと思われるコンパクト群の作用についての分類理論を与えることを第二の目的とした。またその議論を通じて、単射的因子環の自己同型群の構造を理解することも目的とした。

## 3. 研究の方法

$C^*$ 環の群作用の分類においては、Evans-岸本に端を発する intertwining argument が威力を発揮し、様々な分類定理がえられている。

この方法はフォンノイマン環の群作用でも極めて有効で、Connes 以来のモデル作用の分離の技法と比べても、極めてわかりやすい議論であった。この技法を応用することにより、離散従順群の作用の統一的な証明を与えることを考えた。

コンパクト群についてはその双対が離散群に類似の構造を持つので、離散群における議論を一般化することにより分類を遂行する、という方法を考えた。

この研究のためには因子環の自己準同型の解析的な性質が重要となるので、その研究も行った。Popa による部分因子環の解析的な研究がその重要な手がかりとなった。

## 4. 研究成果

以下論文番号は第5節の番号である。論文[1]において離散従順群の単射的因子環への中心的自由な作用が、Connes-竹崎モジュールによって完全に分類できることを Evan-岸本の intertwining argument を適切に変形することによって示した。より一般的な分類定理がすでに知られているのだが、従来の議論とは異なり、本論文では単射的因子環の型によらないより統一的な扱いとなっている。またこの議論の単純な一般化によって、響従順な部分因子環への中心的自由な離散従順群の作用の Loi 不変量による分類も得られた。この定理自体は Popa によって得られ

ていたのだが Popa の論文は難解な上、タイプミスなども多く、それに比べて私の方法は、かなり簡略化されわかりやすい証明となっている。この定理の系として、強従順な  $III_\lambda$  型部分因子環の分類定理が得られた。

論文[2]では有限群の双対の作用の分類を行った。この議論は一般の有限次元カツ環の作用にも一般化できる。結果自体は以下で説明する論文[3]でより一般化されているが、証明の中心部分では、伝統的なモデル作用の分離の技法を用いており、この点が論文[3]との大きな違いである。通常の群作用と大きく異なる点としては、群の双対は中心列フォンノイマン環に自然に作用しないため、この点を工夫して議論する必要があった。キーポイントとなったのは Ocneanu によって主張された、部分因子環の漸近包含関係と中心列部分因子環の構造が本質的に同じである、という点である。

以上の二つの論文での考察が次の戸松氏との共著論文で十分に生かされている。

論文[3]において、戸松玲治氏との共同研究で、最も基本的な作用素環である単射的  $II_1$  型因子環へのコンパクト群の極小作用の一意性の証明に成功した。実際にはコンパクト群の双対の概念の一般化でもある離散従順カツ環の自由な作用の一意性を示し、双対定理を経由することによって、コンパクト群の極小作用の一意性を証明した。

分類の議論では論文[1]での intertwining argument と、[2]での解析的な考察が重要な役割を果たしている。離散カツ環の作用の研究には本質的に自己準同型を扱わなくてはならないが、この解析的な取り扱いが一つの重要なポイントとなっている。また議論の途中では2次コホモロジー消滅定理が必要になるのだが、この定理の証明についても利離散従順群の場合に Ocneanu によって与えられた証明より大幅に簡略化されたものとなっており、 $C^*$ 環の群作用の研究でもこの議論が有効となっている。分類の核心部分では intertwining argument を用いるが、この結果、離散従順群の（より一般には離散従順カツ環の）舗装構造を用いる必要はなくなり、この点が従来の Connes 以来の議論と比べて大幅に議論が簡略になった点である。

論文[4]では、論文[3]での結果を  $III$  型因子環に拡張するために、因子環の自己準同型の解析的な性質を明らかにした。特に因子環が単射的な場合を扱った。そのためにまず自己同型群の位相の自然な拡張として、自己準同型の集合に自然な位相を導入した。そして次の二つの結果を得た。

まず第一に自己準同型の漸近内部性を Connes-竹崎モジュールの言葉を使うことによって特徴付けることに成功した。泉によって導入された自己準同型の因子環のコアへの標準拡大が我々の位相に関しては連続ではないので、泉のものとは多少異なる標準拡大を利用することによって特徴付けを行った。

第二に、泉によって導入された自己準同型のモジュラー性が、中心的に自明であることが同値であることを示した。議論の元になったのは Popa による部分因子環の解析的な研究で、自己準同型が与えられれば、自然に部分因子環が考えられ、この部分因子環の解析的な性質を調べることによって、元の自己準同型の解析的な性質を導いた。以上の結果は、Connes や河東-Sutherland-竹崎によって得られていた自己同型に関する結果の一般化となっているが、議論の一部は彼らの証明とは全く異なる方法が取られている。

論文[5]では、これらの結果を元にある種のコンパクト群の単射的 III 型因子環の極小作用の分類に成功した。論文[3]と同様にまず双対性によって離散従順カツ環の作用の分類を考えた。そして、漸近内部的かつ中心的に自由な作用の一意性を示した。証明自体は III 型因子環の構造定理を用いて、II 型因子環上の作用の分類に帰着させ、[3], [4]の結果を組み合わせることによって証明を遂行した。実際には単射的因子環の型によって場合分けをした。元の作用が漸近内部的であっても II 型因子環に持ち上げたときに、因子環自体の構造から生じる自己同型写像が現れるため、この自己同型と最初に与えられた離散カツ環の作用を同時に考える必要があるため、因子環の分類理論と作用の分類の議論を同時に行う必要があった。特に単射的 III<sub>1</sub> 型因子環の一意性の証明の Connes による議論を作用込みで行う必要があった。系として、単射的 III<sub>1</sub> 型因子環への半単純連結コンパクトリー群の極小作用の一意性が導かれた。以上の論文[4, 5]も戸松玲治氏との共同研究である。

論文[1]では作用に中心的自由性という性質を仮定していたが、群作用の不変量をより詳細に調べることによって、離散従順群の単射的因子環への一般の作用の完全分類の新しい証明を与えることに成功した。(参考文献[M])。従来の議論が因子環の型に強く依存した議論となっているのに対し、私の方法は因子環の型によらないのみならず、議論も大幅に短縮、簡略化されたものとなっている。同時に不変量を実現するモデルの構成についても、Sutherland-竹崎や、Falcone-竹崎の結果を用いることによって、亜群を表面に

出さないより見やすい構成を与えた。これによって群作用のより深い理解が可能となった。

この議論はいろいろ応用がきき、多少の議論の変更によって、例えば片山-竹崎による外部的作用の分類にも簡単な別証明を与えることができる。その際に用いる不変量は片山-竹崎によって導入されたものと実質的には同じものであるのだが、私の定式化の方がより自然であることも判明した。

この議論を更に一般化することによって、戸松氏の共同研究で、論文[5]でカバーできなかったコンパクト群の極小作用の分類をおこなった(参考文献[MT])。論文[5]では漸近内部的、という条件をつけていたが、III 型因子環では漸近内部的でないような離散カツ環の作用がある。全く一般には難しいのだが、作用が Connes-竹崎モジュールを持つ、という仮定の下に中心的自由な作用の分類を行った。これは連結コンパクト群なら自動的に満たされる仮定である。

別の一般化として、作用が中心的自由でない場合も扱った。この場合には単純連結コンパクトリー群のような場合には通常の群作用の特性不変量の一般化としての不変量が定義できる。分類は実質的に通常の群の「作用もどき」の分類に帰着され、参考文献[M]と同様の手法によって完全分類がなされた。その結果単純連結コンパクトリー群の極小作用の分類が、かなりのクラスの単射的因子環に対して得られた。これは泉によって得られているある種のコンパクト群の極小作用の分類定理も含んでいる。この議論でも論文[4]の結果が特に重要な役割を果たしている。

#### 参考文献

[M] Toshihiko Masuda, Unified approach to classification of actions of discrete amenable groups on injective factors, <http://arxiv.org/abs/1006.1176>

[MT] Toshihiko Masuda, Reiji Tomatsu, Classification of actions of discrete Kac algebras on injective factors, in preparation.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① Toshihiko Masuda, and Reiji Tomatsu, Classification of minimal actions of a compact Kac algebra with amenable dual

on injective factors of type III, Journal of Functional Analysis 258, 1965--2025, (2010). (査読有り)

- ② Toshihiko Masuda and Reiji Tomatsu, Approximate innerness and central triviality of endomorphisms, Advance in Mathematics 220, 1075--1134, (2009). (査読有り)
- ③ Toshihiko Masuda, Classification of actions of duals of finite groups on the AFD factor of type II<sub>1</sub>, Journal of Operator Theory, 60, 273--300, (2008). (査読有り)
- ④ Toshihiko Masuda, Evans-Kishimoto type argument for actions of discrete amenable groups on McDuff factors, Mathematica. Scandinavia .101, 48--64, (2007) . (査読有り)
- ⑤ Toshihiko Masuda, and Reiji Tomatsu, Classification of minimal actions of a compact Kac algebra with amenable dual, Commucations in Mathematical Physics. 274, 487--551, (2007). (査読有り)

[学会発表] (計5件)

- ① 増田 俊彦、フォンノイマン環への群・量子群作用の分類、研究集会「作用素環の対称性の研究」京都大学数理解析研究所、2011年1月31日-2月1日。
- ② 増田 俊彦、離散従順群の単射的因子環へのモデル作用の構成について、日本数学会函数解析分科会、名古屋大学、2010年9月24日。
- ③ 増田 俊彦、Evans-岸本型の intertwining argument の一般化と 離散従順群の単射的因子環への作用の分類、日本数学会函数解析分科会、大阪大学、2009年9月25日。
- ④ 増田 俊彦、Evans-Kishimoto intertwining argument の一般化による単射的因子環への 離散従順群の作用の分類、研究集会「作用素環論とその関連分野の研究」、京都大学、2009年9月4日。
- ⑤ Toshihiko Masuda、Classification of minimal actions of a compact Kac algebra with amenable dual, Operator algebra seminars, Fields institute, 2007年11月29日。

[その他]

ホームページ等

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~masuda>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

増田 俊彦 (MASUDA TOSHIHIKO)