

研究種目：若手研究 (B)
 研究期間： 2007～2009
 課題番号： 19740089
 研究課題名 (和文) 可積分系とモノドロミー

研究課題名 (英文) Integrable system and monodromy

研究代表者

竹村 剛一 (TAKEMURA KOUICHI)
 横浜市立大学・国際総合科学部・准教授
 研究者番号：10326069

研究成果の概要 (和文)： ホインの微分方程式とは、確定特異点が4点となる2階のフックス型微分方程式の標準形である。ホインの微分方程式やこれの拡張とみなせる微分方程式に対して、可積分系の考え方を用いて解のモノドロミーの様相を研究した。とくに、ミドルコンボリューションと呼ばれる微分方程式系の変換を用いることでホインの微分方程式においてこれまで知られていなかった解を発見し、そのモノドロミーを調べた。また、第六パンルベ方程式の初期値空間とホインの微分方程式との関係を鮮明にした。

研究成果の概要 (英文)： Heun's differential equation is a standard form of Fuchsian differential equations of second order which have four regular singularities. We studied solutions and monodromy of Heun's differential equation and its generalizations from a viewpoint of integrable system. In particular, we found unexplored solutions of Heun's differential equation by applying middle convolution, which is a transformation of differential equations, and we studied monodromy of the solutions. Moreover we clarified a relationship between Heun's differential equation and the space of initial conditions of the sixth Painleve equation.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,100,000	0	1,100,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	600,000	3,700,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：大域解析学

キーワード： 可積分系、モノドロミー、ホインの微分方程式、ミドルコンボリューション、パンルベ方程式、初期値空間、Hermite-Krichever 仮設法

1. 研究開始当初の背景

可積分系に関して現れる微分方程式と

してガウスの超幾何微分方程式は基本的なものであり、これについては解の接続のようすを記述するモノドロミーなど、大域的な様

相を含んださまざまな研究がなされてきた。

ガウスの超幾何微分方程式は3点に確定特異点をもつ2階のフックス型微分方程式であるが、確定特異点が4点となる2階のフックス型微分方程式の標準形としてホインの微分方程式が知られている。これは、楕円関数を用いた変換により、量子 BC_1 型 Inozemtsev 模型の固有値問題に書き換えられる点で量子可積分系と直接関連している。ホインの微分方程式や量子 BC_1 型 Inozemtsev 模型の解析はガウスの超幾何微分方程式と比べると格段に困難であるが、Bethe 仮設法や Hermite-Krichever 仮設法による研究と併せて有限帯ポテンシャルに関する研究などにより、進展してきた。とくに有限帯ポテンシャルの結果から派生する結果として、ホインの微分方程式においてパラメータの整数性がみとされる時に、大域的なモノドロミーが超楕円積分により表示できること、およびその超楕円積分の導出の仕方が 2003 年頃に解明された。

ところで、パンルベ方程式はある線形微分方程式たちをモノドロミーが保存するように変形したときにパラメータが満たすべき非線形常微分方程式として現れる。ここでの線形微分方程式を含むような微分方程式たちに対して、ホインの微分方程式について発展されていた Hermite-Krichever 仮設法などの手法が適用できることが、本研究開始の直前にわかってきていた。

また、パンルベ方程式やホインの微分方程式はいくつもの物理の模型に現れており、数学者以外からも注目を浴びてきた。

2. 研究の目的

本研究では、モノドロミーなどを調べることにより、可積分系に関して現れる微分方程式の解の性質などを解明していく。とくにホインの微分方程式に対して解やモノドロミーの性質をさらに探求していく。研究開始当初の背景で述べたようにホインの微分方程式を研究する際に開発された手法は応用されてきており、これからも発展が見込まれる。

ところで、本研究開始より少し前に、ホインの微分方程式に対してもダルブー変換という微分作用素による変換によるアプローチが模索されてきていた。また、原岡・Filipuk、Dettweiler-Reiter などにより、ミドルコンボリューションとパンルベ方程式に関する研究成果が得られてきた。これらの研究をもとにして、ホインの微分方程式とその類似の微分方程式に対しても解とモノドロミーをさらに解明していく。そして、さまざまな微分方程式に対しての可積分な解を包括的に見れ

るようにしてさらなる応用への足掛かりを作りたい。

また、多体量子可積分系に関わる方向としては、 BC_1 型 Inozemtsev 模型と対応しているホインの方程式に対してのモノドロミーの超楕円積分による表示式や有限帯ポテンシャル・Hermite-Krichever 仮設法・ダルブー変換などの結果を、 N 体の模型である BC_N 型 Inozemtsev 模型の場合などにも発展させていきたい。これはかなり難しいと思われるがじっくりと取り組んでいきたい課題である。

3. 研究の方法

ここで、研究の目的で述べた Hermite-Krichever 仮設法とミドルコンボリューションについて説明する。

Hermite-Krichever 仮設法とは、主に楕円関数が入った微分方程式に対し、解を Weierstrass のシグマ関数（またはテータ関数）などを用いてモノドロミーや微分方程式そのものと相性が良い形で書けるという仮設をおき、解を求めると同時にモノドロミーも求めるという手法である。これは 1970 年代以降、ソリトン方程式の準周期解を求めるために利用されたものであるが、ホインの微分方程式においてパラメータの整数性がみとされる時にも適用でき、解やそのモノドロミーの研究に使われた。この手法はホインの微分方程式以外の特別な常微分方程式たちにも適用できることが期待され、手法そのものと適用例の双方からの発展が望まれる。また、Hermite-Krichever 仮設法は有限帯ポテンシャルと関連する場合もあり、新たな有限帯ポテンシャルの発見やその解析にも応用が見込まれる。

ミドルコンボリューションは Katz による著書「Rigid local systems」で定式化されたものであるが、後に Dettweiler と Reiter はこれをより平易な道具立てで再定式化した。彼らは、行列を係数にもつ 1 階のフックス型微分方程式系で方程式での特異点がすべて一位の極となっているものに対し、各特異点での係数行列を組み合わせて適切な商空間をとることによりミドルコンボリューションを定義した。これは、微分方程式の解においてはオイラー積分変換に対応する。Filipuk は原岡の影響のもとで第六パンルベ方程式の対称性とミドルコンボリューションを結びつけた。この仕事を見直して考察することにより、第六パンルベ方程式に付随するフックス型微分方程式系やホインの微分方程式の研究を推し進められることが期待できる。

ところで、 BC_1 型 Inozemtsev 模型と対応しているホインの微分方程式に対して、モノドロミーの超楕円積分による表示式や有限

帯ポテンシャル・Hermite-Krichever 仮設法・ダルブー変換などについて結果が得られてきたが、これらの結果を N 体の模型である BC_N 型 Inozemtsev 模型の場合にも確立させ、模型の解析を進めていきたい。攻略方法の一つとして、ダルブー変換の話を用いるものがあり。多変数のダルブー変換については 80 年代に Andrianov-Borisov-Ioffe が結果を得ており、彼らの手法を発展させることは有益であると思われる。別の方法として、Chalykh-Etingof-Oblomkov が 2003 年の Comm. Math. Phys. での論文で展開した BC_N 型 Inozemtsev 模型の代数的可積分性の理論をもとに、有限帯ポテンシャルの話を発展させることが考えられる。この手法には確定特異点をもつ holonomic 系の理論や微分ガロア理論などが用いられており、手法の習得に時間を要するので長期的に取り組む必要がある。また、90 年代に Felder-Varchenko は共形場理論で現れる KZB 方程式の解の積分表示を得て、その漸近挙動を調べることでより A 型楕円 Calogero-Moser-Sutherland 模型に対して Bethe 仮説法を開発した。この周辺の話には、可換微分作用素との関係などさらに解明すべき問題が残されており、それらを解明しつつ BC_N 型 Inozemtsev 模型などの模型自体も調べていきたい。このために、楕円曲線上の共形場理論や関連する模型についても研究を深める必要がでてくる可能性がある。

4. 研究成果

本研究では、おもにホインの微分方程式やこれの拡張とみなせる微分方程式に対して可積分系の考え方をを用いて解のモノドロミーの様相に関する結果を得てきた。

前述した Filipuk によるミドルコンボリューションとパンルベ方程式に関する結果を Dettweiler-Reiter の論文をもとに再定式化することにより、第六パンルベ方程式のピカールの解に対応するフックス型微分方程式系について解の積分表示を得ることに成功し、モノドロミー保存変形によってピカールの解が復元されることを示した。また、解の積分表示により、ホインの微分方程式において新たな解を発見し、そのモノドロミーも決定した。これらについて、論文「Integral representation of solutions to Fuchsian system and Heun's equation」にて発表した。

さきほどの論文では一種類のみドルコンボリューションに対して研究を行ったのだが、その後もう一種類の middle convolution に焦点を当てて研究を行った。これにより、ホインの微分方程式と呼ばれる二階の 4 点確定特異点型の微分方程式との関係がより明

白になった。また、岡本和夫氏によって導入されたパンルベ方程式の初期値空間をフックス型微分方程式系におけるものと考え直すことでホインの微分方程式の現れ方を見ることができるとを発見し、ミドルコンボリューションによってどの部分がホインの微分方程式の範疇で収まっているかを研究した。これにより、二つのミドルコンボリューションの違いが明確化された。この過程で導出されたホインの微分方程式の範疇で収まっている積分変換は Kazakov らが 1996 年に発表したものと類似なものである。これらの結果について論文「Middle convolution and Heun's equation」にて発表した。

ところで、論文「The Hermite-Krichever ansatz for Fuchsian equations with applications to the sixth Painlevé equation and to finite-gap potentials」では、ホインの微分方程式に apparent 特異点を付加したフックス型微分方程式系に対して Hermite-Krichever 仮設法を発展させた。そして、特別な場合として第六パンルベ方程式におけるヒッチンの解や関連する解に対応する線形常微分方程式の解の構造を調べた。別の場合として、有限帯ポテンシャルの理論をホインの微分方程式のものから一般化し、新たな有限帯ポテンシャルのクラスを発見した。

WKB 解析との関係では、論文「Finite-gap potential, Heun's differential equation and WKB analysis」において、ホインの微分方程式に対して有限帯ポテンシャルの方法とは別に WKB 解析による方法について考察し、2つの方法の類似点・相違点について考察した。また、B. Shapiro, M. Tator との共同研究により、前述の論文でのアイデアを精密化し、ホインの微分方程式における多項式解に対してあるパラメータについての漸近的な振る舞いの記述に成功した。

また、 BC_N 型 Inozemtsev 模型についての研究など、多体量子可積分系に関わる方向の研究については、本課題の研究開始の頃に「Towards Finite-Gap Integration of the Inozemtsev Model」という題の論説にて方向性を示したが、それ以降特筆すべき結果を得ることができず、残念な結果となった。本研究課題の期間終了以降も研究を継続して成果を得ていきたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① Kouichi TAKEMURA, Middle convolution and Heun's equation,

- SIGMA*, 査読有, 5 巻 40 号, 2009 年, 1-22
- ② Kouichi TAKEMURA, The Hermite-Krichever ansatz for Fuchsian equations with applications to the sixth Painlevé equation and to finite-gap potentials, *Math. Zeit.*, 査読有, 263 巻, 2009 年, 149-194
- ③ Kouichi TAKEMURA, Integral representation of solutions to Fuchsian system and Heun's equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 査読有, 342 巻, 2008 年, 52-69
- ④ Kouichi TAKEMURA, Finite-gap potential, Heun's differential equation and WKB analysis, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, 査読有, B5 巻, 2008 年, 61-74

[学会発表] (計 5 件)

- ① 大島 利雄、竹村 剛一、各固有空間の次元の最大公約数が 1 にならない場合のドリーニュ・シンプソン問題、日本数学会秋期総合分科会無限可積分系セッション、2009 年 9 月 25 日、大阪大学
- ② B. Shapiro, 竹村 剛一, M. Tator, On spectral polynomials of the Heun equation. II, 日本数学会秋期総合分科会函数方程式論分科会、2009 年 9 月 24 日、大阪大学
- ③ 竹村 剛一、Heun's equation and the space of initial condition for Painleve VI, 日本数学会年会無限可積分系セッション、2009 年 3 月 28 日、東京大学
- ④ 竹村 剛一、Middle convolution and integrability, 日本数学会年会無限可積分系セッション、2008 年 3 月 24 日、近畿大学
- ⑤ 竹村 剛一、Integral representation of solutions to Fuchsian system and Heun's equation、日本数学会秋期総合分科会無限可積分系セッション、2007 年 9 月 21 日、東北大学

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

竹村 剛一 (TAKEMURA KOUICHI)
横浜市立大学・国際総合科学部・准教授
研究者番号：10326069

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者 ()

研究者番号：