

研究種目：若手研究 (B)  
 研究期間：2007～2009  
 課題番号：19760261  
 研究課題名 (和文) 最適信号近似理論に基づく変係数線型偏微分方程式の離散近似解の新しい数値解法の研究  
 研究課題名 (英文) Study of numerical solution of linear partial differential equations with variable coefficients based on the optimum interpolation approximation theory  
 研究代表者  
 木田 雄一 (KIDA YUICHI)  
 奥羽大学・薬学部・講師  
 研究者番号：10405996

研究成果の概要 (和文)：申請者等の開発した最適信号近似理論を、非斉次変数係数線型偏微分方程式の離散的な近似解法に応用し、所与の離散点で所与の非斉次変数係数線型偏微分方程式と初期条件および境界条件を同時に満たす事が理論的に保証された数値解法を確立した。さらに、本数値解法の計算が線形連立方程式の求解に帰着する事を理論的に証明して、並列線形演算ライブラリ ScaLAPACK の利用等により、本数値解法の並列計算プログラムを実現できる事を明らかにした。

研究成果の概要 (英文)：We have developed a numerical solution of inhomogeneous linear partial differential equations (PDEs) with variable coefficients based on the optimum interpolation approximation theory. It is proved that our numerical solution satisfies the given inhomogeneous linear PDE and the given initial/boundary conditions at all the given sample points. Further, we have proved that the actual calculation of our numerical solution results in solving systems of linear equations. Hence, a parallel computation program of our numerical solution can be implemented using a parallel linear algebra library ScaLAPACK.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,100,000	0	1,100,000
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	660,000	3,960,000

## 研究分野：工学

科研費の分科・細目：電気電子工学，通信・ネットワーク工学

キーワード：情報通信工学，シミュレーション工学，数値計算法

## 1. 研究開始当初の背景

各種の物理現象を偏微分方程式によりモデル化してシミュレートする技術は、工業製品の設計や開発において、コストの低減や開発期間の短縮に貢献する技術として広く用

いられている。このようなシミュレーションを行う解析領域の形状は、実用上複雑である場合が通常であり、単純な矩形や円形などではない為、例え線型偏微分方程式でモデル化される問題であっても、解析的な解を求める事

は困難である。その為、この様な偏微分方程式の近似解を求める数値解法の研究が重要となっている。

偏微分方程式の数値解法に関する理論的な研究として、有限差分法と有限要素法が広く研究されている。有限差分法は、所与の初期点または境界点を出発点として、隣接する離散点における所与の偏微分方程式の近似解を、既に計算した離散点における近似解を利用して、次々に求めていく手法である。その為、初期点または境界点から離れるに従って、計算誤差が累積する。有限要素法では、予め選択した形状関数の一次結合として近似解を定義した上で、所与の偏微分方程式に近似解を代入して得られる残差に、重み関数を掛けて解析領域全体に渡って積分した重み付き残差を、最小化する様な結合係数を求める事により、近似解を得る。この近似解は連続関数となるが、各節点において、所与の偏微分方程式を満たす事は理論的に保証されない。

その為、複雑な領域の解析に適用できると共に、より高精度の近似解が得られる数値解法の確立が必要とされる。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、申請者等の開発した「フィルタバンクを用いる最適信号近似理論」を、特殊なフィルタバンクと偏微分方程式との類似性に基づいて、非斉次変数係数線型偏微分方程式の数値解法に応用して、所与の離散点で所与の非斉次変数係数線型偏微分方程式と初期条件および境界条件を同時に満たす事が理論的に保証される新しい数値解法を確立すると共に、本数値解法を並列計算機上で実行する並列計算プログラムの実現法を明らかにする事である。

## 3. 研究の方法

(1) 本数値解法の基礎理論として、解析フィルタの概念をヒルベルト空間における演算子にまで拡張した多次元フィルタバンクを用いる最適信号近似理論を構築する。

(2) 特殊なフィルタバンクと偏微分方程式との類似性に基づいて、本最適信号近似理論を非斉次変数係数線型偏微分方程式の数値解法に応用し、所与の離散点で所与の非斉次変数係数線型偏微分方程式と初期条件および境界条件を同時に満たす事が理論的に保証される新しい数値解法を確立する。

(3) 本数値解法を並列計算機上で実行する並列計算プログラムの実現方法を明らかにする。

(4) より多くの種類の問題に対する数値解

法の構築に貢献する事を目指して、異なる種類の信号を対象とする、もしくは、異なる種類のフィルタバンクを用いる最適信号近似理論を構築する。

## 4. 研究成果

本研究では、所与の非斉次変数係数線型偏微分方程式の未知関数に関する項は全て左辺にあり、既知関数である非斉次項と初期値および境界値は右辺にあるとする。

(1) 並列接続された下記の 2 種類のパス群  $P^G$  と  $P^C$  から成る多次元フィルタバンクを用いる最適信号近似理論を構築した。

第 1 のパス群  $P^G$  は、所与の非斉次変数係数線型偏微分方程式の未知関数の変数領域を離散化した標本点  $\mathbf{x}_m^G$  に 1:1 に対応する複数個の並列接続されたパス  $P_m^G$  から成る。各パス  $P_m^G$  は、対応する標本点  $\mathbf{x}_m^G$  における所与の非斉次変数係数線型偏微分方程式の偏微分作用素をラプラス変換した様な周波数特性をもつ時不変の解析フィルタ  $H_m^G$ 、対応する標本点  $\mathbf{x}_m^G$  においてのみ解析フィルタ  $H_m^G$  の出力の標本値を取得するサンプラ、および、取得された標本値に比例した大きさのインパルス応答を出力する合成フィルタ  $\Psi_m^G$  から成る。

第 2 のパス群  $P^C$  は、所与の初期条件および境界条件を定義している方程式の未知関数の変数領域を離散化した標本点  $\mathbf{x}_m^C$  に 1:1 に対応する複数個の並列接続されたパス  $P_m^C$  から成る。各パス  $P_m^C$  は、対応する標本点  $\mathbf{x}_m^C$  における所与の初期条件および境界条件の偏微分作用素をラプラス変換した様な周波数特性をもつ時不変の解析フィルタ  $H_m^C$ 、対応する標本点  $\mathbf{x}_m^C$  においてのみ解析フィルタ  $H_m^C$  の出力の標本値を取得するサンプラ、および、取得された標本値に比例した大きさのインパルス応答を出力する合成フィルタ  $\Psi_m^C$  から成る。

並列接続された上記の 2 種類のパス群  $P^G$  と  $P^C$  の全パスの出力を足し合せた信号を、本多次元フィルタバンクの出力信号  $g$  とする。一方、入力信号  $f$  は、重み関数  $W$  で重み付けられたエネルギーが規定値以下となる周波数特性をもつ信号の集合  $\Xi$  に属すると仮定する。さらに、入力信号  $f$  と出力信号  $g$  の差を、近似誤差  $e$  と定義する。

解析フィルタ  $H_m^G$  と  $H_m^C$  の周波数特性が既定された本多次元フィルタバンクにおいて、信号集合  $\Xi$  に含まれる全ての入力信号  $f$  に対応する近似誤差  $e$  を調べて得られる各点ごとの近似誤差  $e$  の絶対値の上限値を、変数領域上の全ての点に渡って連ねた関数を  $E_{max}$  とする。合成フィルタ  $\Psi_m^G$  と  $\Psi_m^C$  は、変数領域上の全ての点において  $E_{max}$  を最小化する様に設計する。

この様に合成フィルタ  $\Psi_m^G$  と  $\Psi_m^C$  を設計すると、信号集合  $\Xi$  に含まれる全ての入力信号  $f$  について、その入力信号  $f$  に対応する出力信号  $g$  を本多次元フィルタバンクに再度入力して各パスの解析フィルタを通過させた後にサンプラで取得される出力信号  $g$  の標本値は、入力信号  $f$  の標本値と、全ての標本点において完全に一致するという選点直交性と呼ぶ性質が成立する事を理論的に証明した。

さらに、この様に設計した本多次元フィルタバンクは、近似誤差  $e$  に対して定義される評価尺度に関して、信号集合  $\Xi$  に含まれる全ての信号に渡って入力信号  $f$  を変化させて得られる上限を、任意の評価尺度において一斉に最小化する事を理論的に証明して、多次元フィルタバンクを用いる最適信号近似理論を構築した。

(2) この最適信号近似理論を応用して、非斉次変数係数線型偏微分方程式の新しい数値解法を確立した。

まず、所与の非斉次変数係数線型偏微分方程式の未知の厳密解が、入力信号  $f$  として本多次元フィルタバンクに入力されたと仮定する。このとき、パス群  $P^G$  では、未知の厳密解である入力信号  $f$  が、所与の非斉次変数係数線型偏微分方程式の偏微分作用素に対応する解析フィルタ  $H_m^G$  を通過する事により、所与の非斉次変数係数線型偏微分方程式の左辺に対応する出力が得られる。この出力は、非斉次変数係数線型偏微分方程式の定義により、既知関数である右辺の非斉次項と等しい。従って、この出力を所与の標本点  $\mathbf{x}_m^G$  で取得した入力信号  $f$  の標本値は、未知の厳密解を含む方程式の離散値であるが、同じ標本点  $\mathbf{x}_m^G$  における右辺の非斉次項の値と等しくなるため、既知の値となる。

同様に、パス群  $P^C$  では、未知の厳密解である入力信号  $f$  が、所与の初期条件および境界条件の偏微分作用素に対応する解析フィルタ  $H_m^C$  を通過する事により、所与の初期条件および境界条件を定義している方程式の左辺に対応する出力が得られる。この出力は、初期条件および境界条件の定義により、既知関数である右辺の初期値および境界値と等しい。従って、この出力を所与の標本点  $\mathbf{x}_m^C$  で取得した入力信号  $f$  の標本値は、未知の厳密解を含む方程式の離散値であるが、同じ標本点  $\mathbf{x}_m^C$  における右辺の初期値および境界値と等しくなるため、既知の値となる。

従って、全ての標本値は既知であり、全ての合成フィルタは最適信号近似理論の構築で述べた方法により設計できるので、全ての標本値について、各々の標本値とそれが取得されたパスの合成フィルタのインパルス応答との積を計算し、それら全てを足し合わせる事によって、未知の厳密解である入力信号

$f$  の近似としての出力信号  $g$  が得られる。

この出力信号  $g$  の標本値は、最適信号近似理論における選点直交性により、対応する入力信号  $f$  の標本値と全ての標本点において厳密に一致する。従って、解析フィルタ  $H_m^G$  を通過する事により出力信号  $g$  に所与の非斉次変数係数線型偏微分方程式の偏微分作用素が適用された関数の各標本点  $\mathbf{x}_m^G$  における値は、所与の非斉次変数係数線型偏微分方程式の右辺の同じ標本点  $\mathbf{x}_m^G$  における値と厳密に一致する。さらに、解析フィルタ  $H_m^C$  を通過する事により出力信号  $g$  に所与の初期条件および境界条件の偏微分作用素が適用された関数の各標本点  $\mathbf{x}_m^C$  における値は、所与の初期条件および境界条件の右辺の同じ標本点  $\mathbf{x}_m^C$  における値と厳密に一致する。

従って、出力信号  $g$  は、所与の全ての標本点において、所与の非斉次変数係数線型偏微分方程式と、所与の初期条件および境界条件の両方を厳密に満たす事が理論的に保証された、未知の厳密解の近似解となる事を示して、非斉次変数係数線型偏微分方程式の新しい数値解法を確立した。

さらに、この出力信号  $g$  は、最適信号近似理論の構築で述べた様に、未知の厳密解である入力信号  $f$  との間の近似誤差  $e$  に対して定義され得る任意の評価尺度の上限を、一斉に最小化する事が理論的に証明されるので、所与の標本点以外の点においても、未知の厳密解の良好な近似になる事を明らかにした。

また、最適信号近似理論および本数値解法は、多次元フィルタバンクの解析フィルタに遅延要素が含まれている場合でも完全に成立するので、遅延微分方程式に対する数値解法としても利用できる点は重要である。

(3) 本数値解法における計算は、信号集合  $\Xi$  に含まれる全ての入力信号  $f$  に対応する近似誤差  $e$  を調べて得られる各点ごとの近似誤差  $e$  の絶対値の上限値を連ねた関数  $E_{max}$  を、変数領域上の全ての点において最小化する様に、多次元フィルタバンクの合成フィルタ  $\Psi_m^G$  と  $\Psi_m^C$  を設計する計算が大部分を占める。

この設計の計算は、合成フィルタのインパルス応答を未知変数、信号集合を規定する重み関数  $W$  と解析フィルタ  $H_m^G$  と  $H_m^C$  に関する無限積分の値を結合係数とする連立方程式の求解に帰結する事を理論的に示した。

さらに、解析フィルタ  $H_m^G$  と  $H_m^C$  の周波数特性が、所与の偏微分作用素の各標本点における離散値のラプラス変換に等しく、重み関数が、パラメータを与えて柔軟に周波数特性を変更可能な関数と等しい場合に、上記の無限積分の値を解析的に導出する計算式を発見した。

加えて、この計算式により導出された無限積分の値が定数になる事に基づいて、上記の

連立方程式の全ての結合係数が定数になる事, 即ち, 線型連立方程式になる事を示して, 並列線形演算ライブラリ ScaLAPACK の利用等により, 本数値解法の並列計算プログラムを実現できる事を明らかにした。

(4) より多くの種類の問題に対する数値解法の構築に貢献する事を目指して, 以下に列挙する様に, 異なる種類の最適信号近似理論を構築した。

① 連立非斉次変数係数線型偏微分方程式の数値解法への応用が期待できる基礎理論として, ベクトル信号を対象としたフィルタバンクを用いる最適信号理論を構築した。ここに, ベクトル信号とは, 周波数ベクトルの各要素を周波数特性とみなしてフーリエ逆変換する事で得られる複数の信号の和として定義される信号を指す。

② 確立微分方程式の数値解法への応用が期待できる基礎理論として, 確率的な係数をもつ直交関数展開で表現される信号に関して係数の高次相関が制約された信号の集合を定義し, この信号集合に含まれる信号を対象としたフィルタバンクを用いる最適信号近似理論を構築した。

③ 非線形問題への応用を見込んだ基礎理論として, 解析フィルタの周波数特性が微小な非線形特性をもつフィルタバンクを用いる最適信号近似理論を構築した。

④ 薬物投与計画シミュレーションへの最適信号近似理論の応用を考察した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① Yuichi Kida and Takuro Kida, "Design of effective in-silico adjusting method to support a doctor about the plan of administering medicine", Health Monitoring of Structural and Biological Systems 2010, Proceedings of SPIE, 査読有, Vol.7650, 2010 年, pp. 76502Z.1-76502Z.12.
- ② Yuichi Kida and Takuro Kida, "The optimum approximation of a multidimensional filter-bank having analysis-filters with small non-linear characteristics", Mathematics for Signal and Information Processing, Proceedings of SPIE, 査読有, Vol.7444, 2009 年, pp. 744402.1-744402.12.
- ③ 木田雄二, 木田拓郎, "誤差に対する所与の最悪値評価尺度を最小化する非線形解析フィルタを伴うフィルタバンクに基づく内挿近似理論", 第 22 回 回路とシステ

ム軽井沢ワークショップ論文集, 査読有, 2009 年, pp.119-123.

- ④ Yuichi Kida and Takuro Kida, "Numerical solution of inhomogeneous linear partial differential equations with many independent variables based on the optimum interpolation approximation", Proceedings of the 32nd Symposium on Information Theory and its Applications (SITA2009), 査読無, 2009 年, pp.521-526.
- ⑤ Yuichi Kida and Takuro Kida, "A simple proof of the optimality of the running approximation in FIR filter banks", 電子情報通信学会技術研究報告, 査読無, Vol.109, No.305, 2009 年, pp.103-108.
- ⑥ Yuichi Kida and Takuro Kida, "A Numerical Solution of Linear Variable-Coefficient Partial Differential Equations with Two Independent Variables Based on Kida's Optimum Approximation Theory", Proceedings of International Symposium on Information Theory and its Applications, ISITA2008, 査読有, 2008 年, pp.1592-1597.
- ⑦ Yuichi Kida and Takuro Kida, "The optimum approximation of an orthogonal expansion having bounded higher order correlations of stochastic coefficients", Mathematics of Data/Image Pattern Recognition, Compression, and Encryption with Applications XI, Proceedings of SPIE, 査読有, Vol.7075, 2008 年, pp. 70750E.1-70750E.12.
- ⑧ Yuichi Kida and Takuro Kida, "The optimum running-type approximation for time-limited worst-case measures of error based on Fredholm integral equation using Pincherle-Goursat kernel", Mathematics of Data/Image Pattern Recognition, Compression, Coding, and Encryption X, with Applications, Proceedings of SPIE, 査読有, Vol.6700, 2007 年, pp. 670006.1-670006.12.
- ⑨ Yuichi Kida and Takuro Kida, "A fast calculation method of the optimum running interpolation of vector signals on multi-dimensional FIR filter banks", 電子情報通信学会技術研究報告, 査読無, Vol.107, No.411, IE2007-173, 2008 年, pp.193-198.
- ⑩ Yuichi Kida and Takuro Kida, "Theory of the optimum approximation of vector signals and its application to

multiple-input multiple-output/space division multiplexing”, 電子情報通信学会技術研究報告, 査読無, Vol.107, No. 556, ITS2007-78, 2008, pp.1-6.

[学会発表] (計 11 件)

- ① Yuichi Kida and Takuro Kida, “A Numerical Solution of the Linear Partial Differential Equation with Many Independent Variables Based on the Optimum Approximation”, 2010 年 電子情報通信学会総合大会, 2010 年 3 月 16 日, 東北大学川内キャンパス.
- ② Yuichi Kida and Takuro Kida, “Design of effective in-silico adjusting method to support a doctor about the plan of administering medicine”, SPIE Smart Structures and Materials + Nondestructive Evaluation and Health Monitoring 2010, 2010 年 3 月 10 日, Town and Country Resort & Convention Center(San Diego, California, USA).
- ③ Yuichi Kida and Takuro Kida, “Numerical solution of inhomogeneous linear partial differential equations with many independent variables based on the optimum interpolation approximation”, 第 32 回 情報理論とその応用シンポジウム, 2009 年 12 月 3 日, ホテルかめ福(山口県山口市湯田温泉 4-5).
- ④ Yuichi Kida and Takuro Kida, “A simple proof of the optimality of the running approximation in FIR filter banks”, 電子情報通信学会 無線通信システム研究会(RCS), 2009 年 11 月 27 日, 東京工業大学大岡山キャンパス.
- ⑤ Yuichi Kida and Takuro Kida, “The optimum approximation of a multidimensional filter-bank having analysis-filters with small non-linear characteristics”, SPIE Optics + Photonics 2009, 2009 年 8 月 3 日, San Diego Convention Center(San Diego, California, USA).
- ⑥ 木田雄一, 木田拓郎, “誤差に対する所与の最悪値評価尺度を最小化する非線形解析フィルタを伴うフィルタバンクに基づく内挿近似理論”, 第 22 回 回路とシステム軽井沢ワークショップ, 2009 年 4 月 20 日, 軽井沢プリンスホテルウエスト国際会議場浅間(長野県北佐久郡軽井沢町軽井沢).
- ⑦ Yuichi Kida and Takuro Kida, “A Numerical Solution of Linear Variable-Coefficient Partial Differential Equations with Two Independent Variables Based on Kida’s

Optimum Approximation Theory”, 2008 International Symposium on Information Theory and its Applications (ISITA2008), 2008 年 12 月 10 日, The Langham Hotel(Auckland, New Zealand).

- ⑧ Yuichi Kida and Takuro Kida, “The optimum approximation of an orthogonal expansion having bounded higher order correlations of stochastic coefficients”, SPIE Optics + Photonics 2008, 2008 年 8 月 13 日, San Diego Convention Center(San Diego, California, USA).
- ⑨ Yuichi Kida and Takuro Kida, “A Numerical Solution of the Linear Partial Differential Equation Based on the Optimum Interpolation Approximation”, 2008 年 電子情報通信学会総合大会, 2008 年 3 月 19 日, 北九州市立大学国際環境工学部.
- ⑩ Yuichi Kida and Takuro Kida, “A Fast Calculation Method of the Optimum running interpolation of vector signals on multi-dimensional fir filter banks”, The International Workshop on Advanced Image Technology (IWAIT) 2008, 2008 年 1 月 7 日, Lakeshore Hotel Hsinchu(Hsinchu, Taiwan, ROC).
- ⑪ Yuichi Kida and Takuro Kida, “The optimum running-type approximation for time-limited worst-case measures of error based on Fredholm integral equation using Pincherle-Goursat kernel”, SPIE Optics + Photonics 2007, 2007 年 8 月 26 日, San Diego Convention Center(San Diego, California, USA).

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

木田 雄一 (KIDA YUICHI)

奥羽大学・薬学部・講師

研究者番号：10405996

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし