様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年　5 月 27 日現在

研究種目：若手研究（スタートアップ）
研究期間：2007～2008
課題番号：19840038
研究課題名（和文）　力学系ゼータ関数の解析的性質と安定エルゴード性

研究課題名（英文）　Analytic properties of dynamical zeta functions and stable ergodicity

研究代表者
平山　至大（HIRAYAMA MICHIHIRO）
九州工業大学・工学研究院・准教授
研究者番号：50452735

研究成果の概要：相空間の標準的な測度を保つ写像が与えられると，その測度に依存したエルゴード的鉢と呼ばれる集合が定義できる.エルゴード的な系であればこの集合は全測度をもち，従って特に空でない．しかしながら一般に，エルゴード的でない系についてエルゴード的鉢が空でないのか否かは非自明な問題である．本研究では，適当な条件の下で，エルゴード的鉢の Hausdorff 次元の評価を与えた．この結果から特に，エルゴード的鉢は空でないことが従う．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,350,000	0	1,350,000
2008 年度	1,350,000	405,000	1,755,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,700,000	405,000	3,105,000

研究分野：力学系理論
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：安定エルゴード性

１．研究開始当初の背景

集合 M に作用する群 G が与えられたとき，その G-軌道は群 G により径数付けられた“時間”発展を記述していると考えることができる．このときの漸近的性質の解明が力学系研究の大目標のひとつである．特に変換群 G が Z（整数全体）や R（実数全体）の場合がそれぞれ離散力学系，連続力学系（あるいは流れ）と呼ばれ，力学系理論の主たる研究対象である．報告者は M が Riemann 多様体の場合に，その上の可微分写像の反復が定める離散力学系を研究対象とし，この力学系がもつ葉層構造に注目することで大域的な系の挙動を解明したい．本研究におけるその具体的な課題の一つに，安定エルゴード性の研究がある．

例えば整数係数の d 次正方行列で行列式が 1 または-1 のものは d 次元トーラス上に微分同相写像を定める．この行列の固有値が 1 のベキ根をもたないとき，トーラス上に導かれた力学系は体積に関してエルゴード的であり，更にこのエルゴード性は微小摂動に対して安定である（つまり，微小摂動後の写像が定める力学系も体積に関して依然エルゴード的である）．この現象を指して安定エルゴード性と呼ぶ．またここでトーラス上に導かれた力学系は Anosov 系と呼ばれる力学系の

典型例であることを注意しておく．さてC.Pugh and M.Shub は次の予想を提出している．

予想(1997)　体積保存部分的双曲型微分同相写像全体において，安定エルゴード的な微分同相写像全体は開かつ稠密．

ここに，微分同相写像が部分的双曲型であるとは，接束が拡大，縮小，中心の３つの部分接束に分解されて，微分がそれぞれの部分接束において拡大作用，縮小作用，およびそれらの中間作用をもつことである．すなわち部分的双曲型力学系は，Anosov 系を中心接束が自明な場合として含み，負曲率多様体の単位接束上の測地流の時間 1 写像，また Anosov 系の群拡大など豊富な系を含んでいる．

安定エルゴード性の問題は，近年部分的双曲型力学系の分野において重要な研究対象となっている．

２．研究の目的

(1) 相空間の標準的な測度を保つ写像が与えられたとき，その写像のエルゴード性の判定は基本的な問題である．更に，エルゴード性が系の微小な保測摂動下で保たれるのか否かは，実際的にも理論的にも興味深い問題である．例えば，上述した予想が主張しているような統計的性質の位相的安定性は，力学系ゼータ関数の良い解析的性質を導くことが期待できる．これは報告者が取り組みたいもう一つの課題であり，後述する．

さて，部分的双曲型力学系の拡大的接束，縮小的接束は十分な滑らかさをもたないが，ともに可積分であり位相的不変葉層をもつ．そしてこれらの葉層は絶対連続性と呼ばれる性質をもっており，この性質は力学系に対する局所的な解析から大域の挙動を捉えるときの橋渡し役となる点で重要である．実際に，体積保存 Anosov 系がエルゴード的であることを導く本質は葉層の絶対連続性である．すると，Anosov 系は微小摂動に対して安定なことが知られているので，上の予想は体積保存 Anosov 系に限れば正しいことが従う．

他方，中心接束の可積分性は不定であり，たとえ可積分であっても，その不変葉層が絶対連続性をもつとは限らない．従って上の予想の解決を含め，部分的双曲型力学系の大域的理解には中間作用についての研究が必要不可欠である．

中間作用，特に中心接束が不変葉層をもった場合の絶対連続性の有無については，特殊な部分的双曲型力学系に対する研究がいくつかなされていたが，報告者と Y.Pesin はそれらを含む一般的な結果を得ている．

安定エルゴード性予想は中間作用に関する条件付きで K.Burns and A.Wilkinson により肯定的に解決された．報告者も最近 K.Burns and A.Wilkinson が課した中間作用に関する条件よりも緩い条件で安定エルゴード性予想が肯定的に解決できることを示したが，完全な解決には至っていない．本研究では，この予想の解決を見据えて，引き続き部分的双曲型力学系のエルゴード理論について取り組みたい．

(2) 力学系ゼータ関数は形式的級数として定義される関数のため，絶対収束半径の評価や有理型解析接続可能な領域の決定などの問題が内在している．力学系ゼータ関数のこのような解析的性質を，力学系から自然に誘導される転移作用素と呼ばれる線型作用素のスペクトルの性質に帰着させる手法がある．ただしこの手法による研究は，Anosov 系に代表される中心接束が自明な部分的双曲型力学系に付随する転移作用素以外にはなされていない．報告者は，一般の部分的双曲型力学系に付随する転移作用素の関数解析的方法を研究課題とする．

この関数解析的手法においては，Anosov 系に付随する転移作用素が作用する関数空間に関して，近年著しい改良が進行している．すなわち，Anosov 系の接束分解に現れる拡大的接束および縮小的接束を被作用関数に対する重み付けの方向として内包した，非等方的な超関数空間の導入である．この型の関数空間上で，S.Gouëzel and C.Liverani また V.Baladi and M.Tsujii はそれぞれ，Anosov 系に付随する転移作用素のスペクトル半径と本質的スペクトル半径が真に異なることを明らかにした．このスペクトルギャップから力学系ゼータ関数の極に関する情報を取り出すことができるのみならず，相関関数の減衰に関する詳細な漸近表示が得られることからも，この型の関数空間上での転移作用素の研究は興味深い．

部分的双曲型力学系に付随する転移作用素の関数解析的方法の研究においても，その転移作用素が有効に作用する適切な関数空間の構成が差し当たっての目的となる．Anosov 系とは中心接束が自明な部分的双曲型力学系であったので，一般の部分的双曲型力学系における適切な被作用関数空間の候補としても，重み付けの方向が加味された関数空間が自然に挙げられる，ただし部分的双曲型力学系においては，Anosov 系の拡大，縮小葉層構造が呈していた横断性が崩れてい

る上に，中心接束は一般には方向としての役割を果たさないために，様相は本質的に異なる．

３．研究の方法

（1）部分的双曲型力学系の拡大的接束と縮小的接束は常に可積分で位相的不変葉層をもっている．そこで部分的双曲型力学系が与えられたとき，相空間内の２点がこれら拡大的葉層あるいは縮小的葉層に属する葉に沿って辿り着ける場合に，その２点は互いに到達可能であると呼ぶ．そして相空間内の任意２点が互いに到達可能である場合に，その力学系は到達可能性をもつと呼ぶ．この概念を使うと安定エルゴード性予想は次のような測度論的主張および位相的主張に二分される．

副予想１　到達可能性をもつ体積保存部分的双曲型力学系はエルゴード的である．

副予想２　到達可能性は部分的双曲型力学系全体において開かつ稠密な性質である．

本研究では、この計画に沿って、安定エルゴード性予想に取り組む。特に本研究では前者について重点的に取り組む．

相空間内の２点が到達可能であるという関係は同値関係を定めている．従って力学系が到達可能性をもつとは，この同値関係による同値類が自明なことに他ならない．以下では，この同値関係による同値類を到達可能類と呼ぶことにする．

力学系で不変な測度が与えられると，その不変測度のエルゴード性を次のように特徴付ける不変集合Ｅがとれる：力学系がエルゴード的であるための必要十分条件は集合Ｅが全測度をもつこと．このＥは（与えられた不変測度に関する）生成点集合と呼ばれる．この事実自体は非常に簡単なものであるが，示唆に富んでいる．この不変集合Ｅにおける到達可能類についての詳細を明らかにすべく研究を行う．

この方法で研究を遂行するにあたりまず障害となるのは，非エルゴード的不変測度が与えられたとき，その生成点集合Ｅは一般に測度ゼロで，更には空集合でさえありうることである．つまり前述した生成点集合Ｅにおける到達可能類が一般には考察の対象足り得ない．従ってまずは非エルゴード的不変測度に関する生成点集合Ｅについての研究を行う．

（2）まずは拡大的接束と中心接束による分解を許容する部分的双曲型力学系について関数解析的手法を確立し，その後拡大的接束，中心接束および縮小的接束を許容する一般の部分的双曲型力学系について同様の考察を行う．この関数解析的考察を通して，部分的双曲型力学系ゼータ関数の解析的性質を明らかにする．ただし，全ての部分的双曲型力学系ゼータ関数について意味のある解析的性質は得られない．実際に，転移作用素のスペクトル半径と本質的スペクトル半径が真に異なるような部分的双曲型力学系のゼータ関数が良い解析的性質を呈すると考えられる．

上述した転移作用素のスペクトル半径と本質的スペクトル半径が真に異なるための条件として，横断性に着目している．そこで

1　横断性条件が転移作用素のスペクトル半径と本質的スペクトル半径の差異を導く；

2　横断性条件をみたす部分的双曲型力学系は豊富にある；

という計画に沿って部分的双曲型力学系ゼータ関数の解析的性質を明らかにしたい．

４．研究成果

（1）力学系のエルゴード性を導くには，対応するエルゴード的鉢が全測度をもつことを示せば良い．しかしながら，上述したように，この集合が空でないことさえ一般に非自明である．本研究では横断的到達可能性を定義し，この仮定のもとエルゴード的鉢が空集合でないことを示した（鷲見直哉氏：東京工業大学との共同研究）．現在は，力学系の不変測度が体積と同値であるとき，対応する生成点集合Ｅが全測度をもつことを示すべく鋭意遂行中である．

横断的到達可能性は定義の上では到達可能性より強い性質である．しかし，体積保存部分的双曲型力学系に対して，それらの性質の差はほとんどないか，あるいは横断的到達可能性をもたない体積保存部分的双曲型力学系は疎と思われる．具体例の構成などによってこの点を明らかにし，以降の研究に繋げる．例えば安定エルゴード性に対しては，横断的到達可能性をもつ体積保存部分的双曲型力学系はエルゴード的である，という予想に修正されるのではないかと考えられる．

（2）拡大的接束と中心接束による分解を許容する部分的双曲型力学系について関数解析的手法を考察した．このクラスの力学系には例えば拡大的（すなわち縮小的接束が自明な）Anosov 系のコンパクト群拡大や懸垂流などがある．

現在までの研究でこのクラスの力学系に対して超関数空間を構成し，横断性に関する自然な条件の下で，本質的スペクトル半径の評価を得ている．今後これを進めて，相関関数の漸近評価や，力学系ゼータ関数の解析的性質について考察する．更に，この横断性の条件をもつ部分的双曲型力学系が豊富に存在することを示す．

上述した研究及び関連する研究により，横断性が安定エルゴード問題及び力学系ゼータ関数の良い解析的性質に重要な役割を果たすのではないかと考えられ，今後解明していきたい．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

1. Michihiro Hirayama and Naoya Sumi, Absolutely continuous invariant measures for expansive diffeomorphisms of the 2-torus, Hiroshima Mathematical Journal, vol. 37, pp491--517, 2007（査読有）
2. Michihiro Hirayama and Yakov Pesin, Non- absolutely continuous foliations, Israel Journal of Mathematics, vol.160, pp173-187, 2007（査読有）

〔学会発表〕（計　2　件）

Michihiro Hirayama, Absolutely continuous invariant measures for expansive diffeomorphisms of the 2-torus, COE Conference on the Development of Dynamic Mathematics with High Functionality 2007, 2007 年 10 月 3 日

６．研究組織
(1)研究代表者

平山　至大（HIRAYAMA MICHIHIRO）
九州工業大学・工学研究院・准教授
研究者番号：50452735

(2)研究分担者

(3)連携研究者