

**発展方程式における系統的形状解析及び漸近解析**

Systematical geometric analysis and asymptotic analysis for evolution equations

課題番号：19H05599

**石毛 和弘**（ISHIGE Kazuhiro）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授



研究の概要（4行以内）

自然科学に現れる数理モデルの多くは偏微分方程式として記述され、解の形状解析および漸近解析は数理モデルの解明に必要不可欠である。本研究課題では、拡散方程式を中心に発展方程式やその系の解の漸近解析および形状解析を系統的に行い、それらの解の定性的性質の研究の発展、深化および未開拓問題の発見・解明を目指す。

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：発展方程式、形状解析、漸近解析、冪凹性、爆発問題

1. 研究開始当初の背景

拡散物質の濃度分布や熱の温度分布は時間の経過と共に移ろい行くものであり、その様は熱方程式に代表される発展方程式の解によって記述される。この発展方程式に対する解の形状を研究することは、発展方程式を導入する動機に直結する根源的かつ自然な知的欲求であると共に、爆発や凝集といった非線形現象を詳細に解析するには必要不可欠なものである。一般に発展方程式の解の形状の捉え方は多種多様であるが、解のグラフの最大点・最小点や臨界点の個数・位置やその非退化性、解の凹性や解の等高面の凸性等を調べるのが基本的である。これらの解析は漸近解析の進展に合わせ、Brunn-Minkowskiの不等式を基にした実解析学、関数の再配置理論、凸最大値原理を中心とした解の冪凹解析、粘性解理論等の様々な数学的議論の発展を促し発展し続けている。また、漸近解析の発展に伴い、半線形熱方程式等の解の爆発問題や走化性粘菌の胞子生成モデルであるKeller-Segel方程式系における解の凝集といった様々な非線形発展方程式の解の特異性解析等に应用され続けている。

2. 研究の目的

本研究では、系統的に発展方程式やその系の解の冪凹性を含めた形状解析および漸近解析理論の発展・深化を行いつつ、実解析における基本的な不等式である Brunn-Minkowski の不等式や Hardy の不等式等精密化、楕円型方程式の形状や解構造の研究、発展方程式の

解の爆発現象や界面現象の解析、高階放物型方程式論の構築、動的境界条件付き発展方程式の解の漸近挙動等の研究に応用・発展させていく。また、これらの応用を踏まえて、解の形状解析および漸近解析の基礎理論をより強固なものにしていく。

3. 研究の方法

代表者石毛が中心的役割を果たしながら、研究分担者と協力し各研究項目の研究を進める。また、チュートリアル講義を含む国際研究集会や国内研究集会を開催し、共同研究者や研究連携者らの協力を得ながら研究を遂行していく。各研究項目に対する分担は以下の通り。

- (1) 解の冪凹性理論の進展および精密化  
担当：石毛
- (2) 漸近解析理論の発展および応用  
担当：石毛、川上、岡部
- (3) 解の爆発現象や界面現象の解析  
担当：石毛、石渡(哲)
- (4) 動的境界条件付き発展方程式  
担当：石毛、川上
- (5) 非線形楕円型方程式の解構造の解析  
担当：石毛、宮本
- (6) 有用な様々な不等式の最適性や精密化  
担当：石毛、石渡(通)

研究項目1、2において本研究課題の理論的土台を作り、それらを応用して研究項目3-6の研究を行う。また、研究項目3-6の研究を研究項目1、2へと反映させ、当研究課題の研究全体を連動させる。

#### 4. これまでの成果

各研究項目に分けて説明する。

(1) 解の冪凹性理論の進展および精密化  
P. Salani 氏、Q. Liu 氏と共に、時空間変数に関する放物型方程式の解の冪凹概念である放物冪凹性理論を粘性解理論に基づき再構成しその理論の汎用性を向上させた。さらに、P. Salani 氏、高津飛鳥氏と共に、凸領域上の Dirichlet 境界条件下の熱流は対数凹より強い凹性概念を保存することを証明し、冪凹性の新たな特徴付けも与えた。

(2) 漸近解析理論の発展および応用  
2 次減衰ポテンシャル項付き半線形熱方程式の正值時間大域解の存在・非存在に関する臨界指数(藤田臨界指数)を決定し、既存の理論とは異なる決定メカニズムを明らかにした。また、今まで進展させてきた高次漸近展開理論を応用し、J. Eom 氏と共に常微分方程式の解のように振る舞う解の高次漸近形が拡散方程式によって決定される様子を明らかにした。この他、G. Grillo 氏、M. Muratori 氏と共に、カルタン・アダマール多様体上における確率的完備性の崩れ、非線形拡散方程式の有界な解の非一意性および非線形楕円型方程式の可解性の関係を明らかにした。

(3) 解の爆発現象や界面現象の解析  
高階拡散方程式は符号変化する基本解をもつため、2 階拡散方程式で有効な解析手法が適用できないことが多い。石毛・川上・岡部は高階拡散方程式の基本解に対して半群性に類する性質をもつ優核の構成に成功し、広汎な高階非先生拡散方程式の可解性の研究に適用可能な理論を構築した。また、石渡(哲)は BCF 理論に基づく結晶のスパイラル成長モデルについて、特に外力付きクリスタライン曲率流方程式の解の中心が動く場合における解の一意存在を証明し、漸近挙動も得た。

(4) 動的境界条件付き発展方程式  
M. Fila 氏、J. Lankeit 氏の協力の下、石毛・川上は動的境界条件付き熱方程式を方程式系に変形することによって解の定義を行い、積分核の符号変化による困難点を克服しつつ解の存在を証明した。さらに動的境界条件付き熱方程式のある種の極限として動的境界条件付き楕円型方程式が出現することを示した。

(5) 非線形楕円型方程式の解構造の解析  
宮本はソボレフ優臨の増大度を持つ楕円型方程式の正值球対称解の構造を研究し、正值球対称な特異解が一意的に存在し、古典解のノルムが大きい場合、正值球対称解がこの特異解に適切な意味で収束することを示した。

(6) 様々な不等式の最適性や精密化  
石渡(通)は和田出秀光氏との共同研究により、石渡(通)によって発見された関数不等式に対する変分問題における非コンパクト性の新たなモードである「消滅現象」について、

これが Trudinger-Moser 不等式、Sobolev 型不等式、BV-Sobolev 不等式などに横断的にみられる現象であることを示した。また、B. Ruf 氏、E. Terraneo 氏、F. San 氏らとの共同研究により、Trudinger-Moser 不等式を背景に持つ半線形放物型方程式の漸近挙動の研究を行い、安定集合・不安定集合の存在を得た。

5. 今後の計画  
研究の遂行については順調に推移しているため、各分担者と研究連絡を緊密に取りながら、研究計画に沿ってそれぞれの研究項目について研究を遂行していく。しかしながら、コロナ禍の影響もあり、国内外の研究集会の開催、対面での研究討論や人材交流においてが計画の変更は避けられない。令和3年度はコロナ禍の情勢を良く見ながらオンライン上での各種研究集会を行い、令和4年度以降は国際研究集会の開催、研究討論や人材交流を積極的に行っていく。また、優秀な若手研究者や RA を雇用し、若い研究者の柔軟な思考や研究遂行能力を当研究課題の遂行に活用していく。

#### 6. これまでの発表論文等(受賞等も含む)

1. G. Grillo, K. Ishige and M. Muratori, Nonlinear characterizations of stochastic completeness, J. Math. Pures Appl., 139, 63–82, 2020.
2. K. Ishige, Q. Liu, P. Salani, Parabolic Minkowski convolutions of viscosity solutions to fully nonlinear equations, J. Math. Pures Appl., 141, 342–370, 2020.
3. K. Ishige, N. Miyake and S. Okabe, Blow up for a fourth order parabolic equation with gradient nonlinearity, SIAM J. Math. Anal., 52, 927–953, 2020.
4. K. Ishige, T. Kawakami and S. Okabe, Existence of solutions for a higher-order semilinear parabolic equation with singular initial data, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 37, 1185–1209, 2020.
5. T. Miura and S. Okabe, On the isoperimetric inequality and surface diffusion flow for multiply winding curves, Arch. Ration. Mech. Anal., 239, 1111–1129, 2021.
6. Y. Fujishima and K. Ishige, Initial traces and solvability of Cauchy problem to a semilinear parabolic system, J. Math. Soc. Japan (掲載受理)

#### 7. ホームページ等

<https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~ishige/ki-ban-s/index.html>