

令和 4 年 5 月 9 日現在

機関番号：13701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2021

課題番号：19K03465

研究課題名(和文) 結び目の対称和と本質的曲面

研究課題名(英文) Symmetric unions and essential surfaces

研究代表者

田中 利史 (Tanaka, Toshifumi)

岐阜大学・教育学部・准教授

研究者番号：60396851

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は結び目の対称和の特徴づけ及び分類を行うことである。1984年の論文においてメナスコは交代絡み目の研究において、その外部の曲面を調べるための有効な手法を導入し、これまで結び目理論におけるいくつかの重要な問題の解決を行ってきた。その手法では、結び目補空間の曲面と球面との交わりに現れる曲線の性質を考察することにより、曲面の特徴づけを行っている。私はこれまで同様の手法を用いて結び目補空間の曲面の交わりを調べることで、結び目対称和の特徴づけ及び分類を行ってきた。結果として、結び目の外側にある曲面の特徴づけを3次元位相幾何学的手法を用いて行い、対称和の特徴づけを行うことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまでの結び目の対称和の研究では、主に代数的な手法が用いられてきた。私は本研究において、3次元位相幾何学的手法を用いて研究を行い、実際にそれが対称和の分類に役立つことを示す研究成果を得ることができた。さらにその幾何学的手法を発展させることで、本研究分野において、より多くの研究成果を得られることが期待できる。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this study is to characterize and classify symmetric unions. In 1984, Menasco introduced an effective method for studying a surface in the exterior of an alternating knot and solved some important problems in knot theory. In that method, a surface is characterized by considering the property of curves that appears at the intersection of the surface and a sphere of the knot complement. I have characterized and classified symmetric unions by investigating the intersection of surfaces in the knot complement using similar methods. As a result, we could characterize surfaces in the knot complement using the three-dimensional topology and characterize symmetric unions

研究分野：トポロジー

キーワード：リボン結び目 対称和 曲面

## 1. 研究開始当初の背景

結び目コボルディズムはフォックスとミルナーの研究により注目を集めて以来、研究が盛んに行われているトポロジーの分野である。結び目コボルディズムとは結び目の集合に与えられる同値関係のことであり、その同値関係の同値類の集合を考えると、それは群の構造を許容する。この群は結び目コボルディズム群とよばれ、その単位元にあたるものがスライス結び目である。このスライス結び目は4次元球体に埋め込まれた円板の境界になり得る結び目であると定義される。これまでのスライス結び目の特徴づけに関する研究は主に、代数的不変量を用いて行われてきた。例えば、そのような研究はフォックスとミルナーの論文においても見ることができる。その論文では、任意のスライス結び目のアレキサンダー多項式が特別な形で表せることが示されている。3次元球面内のリボン型特異点集合のみをもつ特異円板の境界となり得る結び目はリボン結び目とよばれる。リボン結び目はスライス結び目であることが知られている。リボン結び目以外のスライス結び目の例は現在まで知られていない。これに関する次のフォックスによる予想を解決することは、重要な問題の1つである。

予想. すべてのスライス結び目はリボン結び目である。

これはスライス-リボン予想とよばれているが、2橋結び目の族やプレツェル結び目のある族については正しいことが示されている。

1950年代に木下と寺坂により結び目の対称和が導入された。これはスライス結び目の構成法である。結び目とある平面に関するその鏡映を、2本のひもからなるいくつかのタングルを用いて、その平面に沿ってつなぐことにより得られる。対称和はリボン結び目の例として知られている。ラムは対称和の特徴づけをアレキサンダー多項式や結び目群を用いている。一方で、次の問題は未解決であり本研究の核心をなす問題である。

問題. すべてのスライス結び目は対称和であるか。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は結び目の対称和の特徴づけ及び分類を行うことである。結び目の対称和は、1960年代から研究が盛んに行われている結び目コボルディズムの分野において、重要な研究対象であるスライス結び目の例である。「全てのスライス結び目が結び目の対称和であるか」は未解決の問題である。本研究を通して、この問題を解決したいと考える。

低次元多様体の位相的研究において、多様体の内部の曲面の位置や幾何学的性質を用いて、多様体の位相的性質を特徴づけることは、基本的かつ重要な問題である。特に3次元多様体内の結び目に対して、その補空間に埋め込まれた本質的曲面が存在するかを考察することは重要である。結び目コボルディズムの分野では、スライス結び目の位相的分類に関するいくつかの重要な課題がある。その中で、次のような課題に取り組むことがこの研究の目的である。

研究課題: 補空間の曲面の幾何学的性質を調べ、結び目の対称和の特徴づけ及び分類を行う。

## 3. 研究の方法

1984年の論文においてメナスコは交代絡み目の研究において、その外部の曲面を調べるための有効な手法を導入し、これまで結び目理論におけるいくつかの重要な問題の解決を行ってきた。メナスコの手法では、結び目補空間の曲面と球面との交わりに現れる曲線の性質を考察することにより、曲面の特徴づけを行っている。私はこれまで同様の手法を用いて結び目補空間の曲面の交わりを調べることで、結び目対称和の特徴づけ及び分類を行ってきた。

具体的には次のような方法を用いた。2019年度及び2020年度は結び目補空間の分解球面や本質的トーラスと対称平面との交わりに現れる閉曲線の性質を調べることで、対称和の特徴づけを行った。さらに、対称和が絡み目の場合に対称なりボン曲面を考察することで研究を行い、それぞれの成分が対称和であることを示した。2021年度は対称和表示の研究を3次元位相幾何学的な手法を用いて研究を行った。

## 4. 研究成果

本研究の目的は、結び目の対称和の特徴づけ及び分類を行うことである。結び目の対称和は、1960年代から研究が盛んに行われている結び目コボルディズムの分野において重要な研究対象であるリボン結び目の例である。

まず対称和が合成結び目の場合の研究において、最小ねじれ数が1である場合に、ある非自明な結び目とその鏡像を連結和成分として含むという研究成果を、国際的査読有雑誌「Journal of Knot Theory and Its Ramifications」に発表した。

サテライトリボン結び目の研究においては、合成対称和を構成するタングルが1個の場合に、その補空間に互いに平行でない圧縮不能トーラスが少なくとも2つ存在することを示し、さらにその結果を用いて、最小ねじれ数が2以上である対称和の存在を、結び目の双曲性を用いて示した。この結果は、国際的査読有雑誌「Osaka Journal of Mathematics」に発表した。

一方で、対称和が絡み目の場合についても考察し各成分が対称和となることを示した。この結果より、対称和とその成分の最小ねじれ数の間の不等式を示すことができ、特に最小ねじれ数がいくらかでも大な対称和の存在を示すことができた。

リボン結び目の対称和表示の分類に関する研究においては、3次元位相幾何学的手法を用いて対称和表示の分類を行うことができた。具体的には、対称和表示は同値なものを除いて有限個であるか、という問題に対して反例を与えることができた。また同じ結び目の対称和表示に関する結果について、幾何学的手法を用いた証明を与えた。この結果は、上述した雑誌「Journal of Knot Theory and Its Ramifications」に発表した。その他、対称和のジョーンズ多項式の公式を与え岐阜大学教育学部研究報告（自然科学）に発表している。この結果によって最小ねじれ数が2である対称和の存在を示すことができる。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 2件）

|  |                       |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Tanaka, Toshifumi  | 4. 巻<br>58            |
| 2. 論文標題<br>On satellite knots with symmetric union presentations           | 5. 発行年<br>2021年       |
| 3. 雑誌名<br>Osaka J. Math.   | 6. 最初と最後の頁<br>685-696 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし  | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                     | 国際共著<br>-             |
| 1. 著者名<br>Tanaka, Toshifumi  | 4. 巻<br>30            |
| 2. 論文標題<br>On equivalence of symmetric union presentations for ribbon knot | 5. 発行年<br>2021年       |
| 3. 雑誌名<br>J. Knot Theory Ramifications                                     | 6. 最初と最後の頁<br>-       |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1142/S0218216521500589                       | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                     | 国際共著<br>-             |
| 1. 著者名<br>Tanaka, Toshifumi  | 4. 巻<br>46            |
| 2. 論文標題<br>A formula for the Jones polynomial of symmetric unions          | 5. 発行年<br>2022年       |
| 3. 雑誌名<br>岐阜大学教育学部研究報告（自然科学）   | 6. 最初と最後の頁<br>1-6     |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし  | 査読の有無<br>無            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である）                                      | 国際共著<br>-             |
| 1. 著者名<br>Toshifumi Tanaka   | 4. 巻<br>45            |
| 2. 論文標題<br>On Fox colorings of symmetric unions                            | 5. 発行年<br>2021年       |
| 3. 雑誌名<br>岐阜大学教育学部研究報告（自然科学）   | 6. 最初と最後の頁<br>11-14   |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし  | 査読の有無<br>無            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である）                                      | 国際共著<br>-             |

|  |                    |
|--|--------------------|
| 1. 著者名<br>田中利史   | 4. 巻<br>28         |
| 2. 論文標題<br>On composite knots with symmetric union presentations | 5. 発行年<br>2019年    |
| 3. 雑誌名<br>Journal of Knot Theory and Its Ramifications           | 6. 最初と最後の頁<br>1-22 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1142/S0218216519500652            | 査読の有無<br>有         |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                           | 国際共著<br>-          |

〔学会発表〕 計4件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件)

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>田中利史  |
| 2. 発表標題<br>On equivalence of symmetric union presentations for ribbon knot |
| 3. 学会等名<br>拡大K00Kセミナー 2021   |
| 4. 発表年<br>2021年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Toshifumi Tanaka                                      |
| 2. 発表標題<br>On knots and links with symmetric union presentations |
| 3. 学会等名<br>拡大K00Kセミナー 2020                                       |
| 4. 発表年<br>2020年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>田中利史  |
| 2. 発表標題<br>On satellite knots with symmetric union presentations |
| 3. 学会等名<br>トポロジーとコンピュータ2019                                      |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>田中利史  |
| 2. 発表標題<br>Symmetric unions and essential tori         |
| 3. 学会等名<br>Knots and Spatial Graphs 2020 (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2020年  |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|