

令和 6 年 5 月 28 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03493

研究課題名（和文）ゲージ理論からの無限次元力学系とホモトピー論による低次元多様体の不変量

研究課題名（英文）Invariants of low dimensional manifolds from infinite dimensional dynamics in gauge theory and homotopy theory

研究代表者

笹平 裕史（Sasahira, Hirofumi）

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：30466825

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究ではSeiberg-Witten Floer安定ホモトピー型と呼ばれる3次元多様体の不変量を主に研究した。その不変量は大変重要な不変量ではあるが、定義、計算が困難なため、本研究課題が始まる前までは研究が進展していなかった。本研究で、Seiberg-Witten Floer安定ホモトピー型の定義や計算に関する基礎的研究を行った。また、境界付き4次元多様体への応用に関する研究も行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

シンプレクティック幾何学や結び目理論などに関するFloer理論では、ホモロジー的不変量からホモトピー的不変量への精密化が盛んに研究され、成果が出つつある。本研究ではSeiberg-Witten Floer理論において、その研究の流れを進めることができた。

研究成果の概要（英文）：I studied the Seiberg-Witten Floer stable homotopy type which is an invariant of closed 3-manifolds. The invariant had been defined only for 3-manifolds with first Betti number zero and computed only for a few types of Seifert fibered spaces. I have studied to extend the invariant to a class of 3-manifolds and to establish a way to compute for more 3-manifolds.

研究分野：幾何学

キーワード：Seiberg-Witten理論 Floer理論

1. 研究開始当初の背景

シンプレクティック幾何学や低次元トポロジーにおいて Floer ホモロジーと呼ばれる不変量がさまざまな状況で定義され、多くの応用を生み出している。Floer ホモロジーは、ある無限次元上の汎関数の Morse ホモロジーとして定義される。Floer ホモロジーにより多くの興味深い結果が得られているが、この不変量をホモトピー論的な不変量に精密化し、さらに強力な応用を得ることが近年研究されてきている。

Seiberg-Witten Floer 理論においては、Manolescu が第一 Betti 数が 0 の 3 次元閉多様体に対して、Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型を構成した。これは Kronheimer-Mrowka による Seiberg-Witten Floer ホモロジーの精密化になっている。さらに Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型を用いて、5 次元以上の位相多様体で三角形分割できないものの存在を証明した。これはトポロジーにおける長年の未解決問題であった。また、Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型から Froyshov 型不変量という有理数に値を持つ 3 次元多様体の不変量が定義され、境界付き 4 次元多様体の交差形式への応用が与えられた。閉 4 次元多様体の交差形式の研究を境界付き 4 次元多様体への拡張したものになっている。

第一 Betti 数が正の場合の Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型の定義は、Manolescu-Kronheimer の先駆的な研究があり、Lin, Khandhawit と筆者による研究が行われた。その結果、任意の閉 3 次元多様体に対して Floer 安定ホモトピー型の定義が与えられた。ただし、この Floer 安定ホモトピー型は、元々の Floer ホモロジーの精密化でなく、適当な局所系で捻った Floer 安定ホモトピー型の精密化である。局所系で捻っていない元来の Floer ホモロジーに対応する Floer 安定ホモトピー型の構成には、解析的困難があり、定義されていなかった。

Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型の計算に関しては、非常に特殊なザイフェルトファイバー空間に限られていた。そのために、Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型の具体的な応用の範囲は限定的であった。

2. 研究の目的

Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型の定義をより広いクラスの 3 次元多様体へ拡張することと、計算方法の確立が本研究課題の目的である。これらを行うことにより、Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型の応用の適用範囲が広がり、低次元トポロジーへの新たな期待ができる。また、本研究では Seiberg-Witten Floer 理論を中心に研究を行うが、本研究での手法がインスタントン Floer 理論、シンプレクティック幾何学の Floer 理論、Heegaard Floer 理論においても用いることができる可能性があり、Floer 理論全体の発展にも寄与することが期待できる。

3. 研究の方法

(1) 第一 Betti 数が正の 3 次元多様体に対する Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型

3 次元多様体の第一 Betti 数が正の場合に、(局所系で捻っていない Floer ホモロジーに対応する) Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型の構成については、ミシガン州立大学の Stoffregen との共同で行った。Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型は、3 次元多様体の上の Seiberg-Witten 方程式が定義する無限次元空間上の力学系を有限次元近似し、Conley の理論を適用することで定義される。第一 Betti 数が正の場合、Seiberg-Witten 方程式の良い解析的性質を失わないようしながら有限次元近似するのが非常に難しく、Floer 安定ホモトピー型の定義ができていなかった。この困難をどのように解決するかというのが、Stoffregen との共同研究の中心的な課題であった。

(2) Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型の計算

Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型の計算手法の確立については、3 次元多様体の手術に関する完全系列の研究を行った。3 次元多様体とその中の結び目があったときに、結び目に沿って多様体を手術することにより新しい 3 次元多様体を得られる。元の 3 次元多様体と新しい 3 次元多様体の Floer ホモロジーの間に完全系列があり、これが Floer ホモロジーの計算に非常に有効であった。この完全系列を Floer 安定ホモトピー型へ拡張することができれば、Floer 安定ホモトピー型の計算を多くの場合に実行できることが期待できる。Dai や Stoffregen との共同研究として研究を行った。

(3) 3次元多様体の族に対する Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型

Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型の新たな応用を得るために、東京大学の今野氏と共同で、3次元多様体の族に対する Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型の研究を行った。閉4次元多様体の族に対する Seiberg-Witten 方程式を考えることにより、微分同相群に関する興味深い応用があることが知られている。3次元多様体の族に対する Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型を用いることにより、境界付き4次元多様体の微分同相群への応用を得ること目的として議論した。

4. 研究成果

(1) 第一 Betti 数が正の3次元多様体に対する Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型

Stoffregen との共同研究により、3次元多様体の一次のコホモロジー上のトリプルカップ積が0のときに、解析的な困難を解決し、Floer 安定ホモトピー型を構成することに成功した。この研究で行ったことは、インスタント Floer 理論やシンプレクティック幾何学の Floer 理論においても用いることが期待され、今後、Seiberg-Witten 理論以外への応用も研究していく予定である。

(2) Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型の計算

Stoffregen との共同研究により、3次元多様体の手術に関して、Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型に対する完全系列を示すことができた。証明は Seiberg-Witten Floer ホモロジーに対する完全系列の証明を、ホモトピーレベルに持ち上げることにより行われた。さらに Dai と Stoffregen との共同研究により、完全系列を用いて、第一 Betti 数が0の広いクラスの3次元多様体に対する具体的計算を実行した。この計算により、境界付き4次元多様体の交差形式への応用を得ることができる。

第一 Betti 数が正の場合の計算については今後の課題として残った。

(3) 3次元多様体の族に対する Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型

今野氏との共同研究により、族の3次元多様体の Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型を用いて、Froyshov 型不変量を定義した。それを用いることで、境界付き4次元多様体の微分同相群に関する非自明な結果を得られることを明らかにした。境界の3次元多様体の微分同相の4次元多様体へ拡張に対する障害や境界付近の Dehn 手術に関する応用を得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 T. Kato, H. Sasahira, H. Wang	4. 巻 171
2. 論文標題 Twisted Donaldson invariants	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	6. 最初と最後の頁 515-568
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/S0305004121000013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Khandhawit Tirasan, Lin Jianfeng, Sasahira Hirofumi	4. 巻 124
2. 論文標題 Unfolded Seiberg-Witten Floer spectra, II: Relative invariants and the gluing theorem	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Differential Geometry	6. 最初と最後の頁 231-316
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/jdg/1686931602	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 5件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 笹平 裕史
2. 発表標題 Seiberg-Witten Floer stable homotopy type and its applications to Corks and the intersection forms of 4-manifolds
3. 学会等名 変換群論の新潮流（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 笹平 裕史
2. 発表標題 Surgery exact triangle for Seiberg-Witten Floer stable homotopy type
3. 学会等名 Gauge theory in Kyoto（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 笹平 裕史
2. 発表標題 第一Betti数が正の3次元多様体のSeiberg-Witten-Floer安定ホモトピー型とトポロジーへの応用
3. 学会等名 4次元トポロジー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 笹平 裕史
2. 発表標題 Freed-Uhlenbeck 第10章の解説
3. 学会等名 微分トポロジー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 笹平 裕史
2. 発表標題 Seiberg-Witten-Floer安定ホモトピー型
3. 学会等名 幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 笹平 裕史
2. 発表標題 Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type for 3-manifolds with positive first Betti number
3. 学会等名 第1回日独友好幾何学研究集会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 笹平 裕史	4. 発行年 2024年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 144
3. 書名 サイバーク-ウィッテン方程式, ホモトピー論的手法を中心に	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	ミシガン州立大学			
米国	テキサス大学			