

令和 5 年 6 月 12 日現在

機関番号：16101

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03566

研究課題名（和文）線型・非線型・連続・差分にまたがるストークス現象

研究課題名（英文）The Stokes phenomenon on linear or nonlinear, differential and differential equations

研究代表者

大山 陽介（OHYAMA, Yousuke）

徳島大学・大学院社会産業理工学研究部（理工学域）・教授

研究者番号：10221839

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：異なる2点での微分方程式や差分方程式の解の間の関係を決める問題を接続問題と言います。また、特異点の近傍での解は発散級数で表されますが、その意味付けを与える本当の解が異なる現象をストークス現象と呼びます。こうした接続問題やストークス現象を高階 $q$ -超幾何差分方程式や $q$ -パンルヴェ方程式の場合に決定しました。特に $q$ -パンルヴェVI型方程式の接続係数全体の空間、いわゆる指標多様体が4次のデル・ペッツォ曲面すなわちセグレ曲面になることを発見しました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

微分方程式・差分方程式の接続問題は数理学の基本的な問題の一つです。またストークス現象も19世紀より知られており、収束しない発散級数を意味付けすることは新しい数学の源泉の一つです。 $q$ -差分方程式の場合のストークス現象の研究によって場の量子論など現代的な数理学への応用が見込まれます。また、 $q$ -パンルヴェ方程式の大域解析のためにも $q$ -ストークス問題を解くことが必要になりますが、 $q$ -超幾何方程式のストークス現象を用いて、 $q$ -パンルヴェ方程式の指標多様体の構造が明確になり、さらなる発展が期待できます。

研究成果の概要（英文）：The problem of determining the relation between solutions of differential or difference equations at different points is called a connection problem. Moreover, solutions in the neighborhood of singular points are expressed by divergent power series, and the phenomenon where the true solution differs in different regions is called the Stokes phenomenon. We solve connection problems and the Stokes phenomena in the case of higher order  $q$ -hypergeometric difference equations and some  $q$ -Painleve equations. In particular, we discover that the space of connection for the  $q$ -Painleve VI equation, known as the character manifold, becomes the Segre surfaces, i.e., fourth-order Del Pezzo surfaces.

研究分野：古典解析学

キーワード：ストークス現象 接続問題 超幾何方程式 パンルヴェ方程式

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(1)  $q$ -超幾何函数の接続問題について 2000 年ごろより不確定特異点の場合の研究が始まった。本研究の前に基本的な 2 階の  $q$ -超幾何方程式の  $q$ -ストークス問題は完全に解かれていたので、高階の場合が目標になっていた。

(2)  $q$ -パウルヴェ方程式の接続問題は、2 つの  $q$ -超幾何方程式を合わせることによって得られることはわかっていたが、 $q$ -超幾何方程式の大域問題がわかっていなかったために進展しなかった。 $q$ -パウルヴェ VI 型方程式に関しては不確定特異点を持たないハイネの  $q$ -超幾何方程式の接続公式だけで良いので、接続問題は雑把にはわかっていたが、その指標多様体の記述が困難であった。

### 2. 研究の目的

(1) 研究の主目的としては、高階の  $q$ -超幾何方程式の  $q$ -ストークス問題を完全に解くことが目標である。とりあえずの目標として、無限遠もしくは原点のいずれかが確定特異点の場合を第一目標にした。これは 2 階の場合でも、無限遠と原点の両方が不確定の場合 ( $q$ -エルミート-ウェーバーの場合) が難しかったことからの経験に基づく。ニュートン図形が 3 辺を持つ場合が主目標とした。

(2)  $q$ -パウルヴェ方程式の接続問題に関して、攻略方法はわかっているが、不確定特異点を持つ場合が難しいので、個別に考えることにする。また、接続問題はより抽象的に考えて、指標多様体の記述を第一目標にした。指標多様体がわかれば次のステップとしては特殊解の研究につながる。

### 3. 研究の方法

(1)  $q$ -超幾何方程式の攻略方法は、 $q$ -ポレル・ラプラスの方法を用いる。高階の  $q$ -超幾何方程式で、最も一般的なニュートン図形が 3 辺を持つ場合が難しいが、そのために、分岐級数に対して 2 回  $q$ -ラプラス変換を作用させ、双方向  $q$ -超幾何級数の接続公式を用いる。分数冪の場合にも  $q$ -ポレル・ラプラスの方法を拡張しておくことが重要になる。最終的には、双方向  $q$ -超幾何級数の接続問題に落とし込めれば良いので、通常の単方向幾何級数を双方向  $q$ -超幾何級数に落とし込む手法を見出す。

$q$ -パウルヴェ方程式の場合は、確定型の場合はほぼ同じで、二つの超幾何方程式の接続行列の積になる。実際には、 $q$ -パウルヴェ方程式のラックス方程式 (線型化方程式) の分解のところが難しい。 $q$ -パウルヴェ VI 型方程式の指標多様体についても、ラフな構造はわかっているので、どこまで精緻化するかが鍵である。

### 4. 研究成果

(1) 任意の階数の  $q$ -超幾何差分方程式で、無限遠が確定特異点を持つ場合のストークス現象を完全に決定することに成功した。 $q$ -超幾何函数のストークス係数は 2 階の場合はすでに決定できており、研究開始以前の段階では、3 階まで完成していたが証明方法が複雑で高階化が難しいように思えた。任意の階数の  $q$ -超幾何差分方程式で、無限遠が確定特異点を持つ場合のストークス現象を完全に決定することに成功した。

無限遠が確定特異点を持つ場合高階方程式の場合、原点でのニュートン図形は一般には 3 つの辺を持ち、0 次を含む辺に対応する解は収束、その次の辺は発散する  $q$ -超幾何級数、残る辺は発散する分岐級数になり、最後の発散する分岐級数に関するストークス現象が難しかった。この分岐級数に対して 2 回  $q$ -ラプラス変換を作用させ、双方向  $q$ -超幾何級数の接続公式を用いることで、 $q$ -超幾何差分方程式のストークス現象を記述することに成功した。

本研究は、2019 年夏にヴェルサイユ大学・ストラスブール大学を訪問した時に得られたもので、リール大学の Changgui Zhang 氏との共同研究になるものであり、同年 9 月に開かれたストラスブール大学の研究会などで報告した。

(2) 続いて鈴木貴雄氏らによって発見された A-型の  $q$ -パンルヴェ方程式の接続問題を考察した。ドリinfeld・ソコロフ型からの相似還元によって得られる A-型  $q$ -パンルヴェ方程式は特殊解として  $q$ -超幾何関数を持っており、構造的には高階  $q$ -超幾何関数の接続問題が適用可能だと思われるためである。残念ながら、A-型  $q$ -パンルヴェ方程式の漸近解析までには至っていないが、A-型  $q$ -パンルヴェ方程式のラックス対を考察すると、その退化をすることによって  $q$ -超幾何方程式に帰着することがわかったので、 $q$ -パンルヴェ VI 型方程式の場合とほぼ同様に A-型  $q$ -パンルヴェ方程式大域構造が判明する。不確定特異点を持つ場合への足がかりになるう。

また、長年未完成となっていた  $q$ -パンルヴェ VI 型方程式の指標多様体の構成について、論文が未完であったが、2020 年に Ann. Fac. Sci. Toulouse: Math. に掲載された。引き続き、 $q$ -パンルヴェ III 型、V 型方程式の漸近解析と  $q$ -ストークス係数の関係も国内学会で報告した。さらに、 $q$ -パンルヴェ III 型方程式の漸近解析と  $q$ -ストークス係数との対応については、秋の数学会で報告した。また、上記の研究に基づいたサーベイ講演を 2021 年に Andrey Bolibrukh の 70 歳記念研究会で行った。

ちなみに、この掲載号は長年にわたって微分ガロア理論やパンルヴェ方程式を研究された故・梅村浩氏の追悼記念号であり、梅村氏の数学的業績の紹介記事も書かせていただいた。追悼記念号が出版された後、フランスで梅村氏の業績を辿ろうとする若い人もいよう、多少なりとも今後の発展に影響を与えるかもしれない。この研究も、今後の  $q$ -パンルヴェ方程式の基礎となる研究と期待をしている。

(3)  $q$ -パンルヴェ VI 型方程式の接続問題は本研究の開始直後に大きく進んではいたが、指標多様体の構成の記述が我々の研究の直後に進んできた。2022 年初めに N. Joshi と P. Roffelsen の研究で、 $q$ -パンルヴェ VI 型方程式の指標多様体が 4 次曲面であることが示された。我々の結果が 2 つの 2 次超曲面の共通部分だったことと合わせて、 $q$ -パンルヴェ VI 型方程式のモノドロミ多様体がセグレ曲面であることに気がついた。これは古典的なパンルヴェ VI 型方程式のモノドロミ多様体がフリッケ-クラインの 3 次曲面であったことの  $q$ -類似であり、完全に一致しないところを含めて極めて面白い構造になっている。

2022 年 10 月にストラスブールで国際研究会 "Painleve Equations: From Classical to Modern Analysis" が開かれた。この研究会で、 $q$ -パンルヴェ VI 型方程式の指標多様体に関する結果を、パンルヴェ方程式の周辺の話題とともに報告した。関連した一つの結果としては、 $q$ -パンルヴェ V 型方程式の大域構造の結果があるが、まだ完全に指標多様体を決定するところまで至っていない。もう一つの結果としては、古典的なパンルヴェ VI 型方程式でのフリッケ-クラインの 3 次曲面が持つ 27 本の直線の交点の特別な場合が金子和雄の 4 つの有理型解になるが、その  $q$ -類似をセグレ曲面でも示せたことである。

本研究によって、従来はほとんど手付かずだった  $q$ -パンルヴェ方程式の大域構造の研究が近い将来に大きく変わりそうな予感を持てるまで進んだと考えている。成果をまとめる形で 2023 年 3 月の国際研究会 "Differential Geometry and Integrable Systems" (大仁田義裕氏の退職記念) で報告した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 大山陽介	4. 巻 43
2. 論文標題 楯円関数とPainleve性について	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 津田塾大学数学・計算機科学研究所報	6. 最初と最後の頁 77-104
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 大山 陽介	4. 巻 692
2. 論文標題 可積分系と保型形式	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数理科学	6. 最初と最後の頁 63-69
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ohyama Yousuke, Ramis Jean-Pierre, Sauloy Jacques	4. 巻 29
2. 論文標題 The space of monodromy data for the Jimbo-Sakai family of q-difference equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annales de la Faculte des sciences de Toulouse : Mathematiques	6. 最初と最後の頁 1119 ~ 1250
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/afst.1659	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Okamoto Kazuo, Ohyama Yousuke	4. 巻 29
2. 論文標題 Mathematical works of Hiroshi Umemura	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annales de la Faculte des sciences de Toulouse : Mathematiques	6. 最初と最後の頁 1053 ~ 1062
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/afst.1656	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

[学会発表] 計15件(うち招待講演 6件/うち国際学会 5件)

1. 発表者名 OHYAMA, Yousuke
2. 発表標題 Connection problems on Painleve equations
3. 学会等名 Exact WKB Analysis, Microlocal Analysis, Painleve Equations and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大山 陽介
2. 発表標題 楕円関数とPainleve性について
3. 学会等名 第31回数学史シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 OHYAMA, Yousuke
2. 発表標題 The space of connection data of q-linear equations and q-Painleve equations
3. 学会等名 Kobe Seminar on Integrable Systems
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 大山 陽介
2. 発表標題 Asymptotic Analysis of the third q-Painleve equation
3. 学会等名 2020年日本数学会度秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 OHYAMA, Yousuke
2. 発表標題 q-Stokes phenomenon of basic hypergeometric equations and the Painleve equations
3. 学会等名 Analytic theory of differential and difference equations dedicated to the memory of Andrey Bolibrukh (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 OHYAMA, Yousuke
2. 発表標題 q-connection problems on hypergeometric and Painleve equations
3. 学会等名 Web-seminar on Painleve Equations and related topics
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大山 陽介
2. 発表標題 高階q-超幾何方程式のq-Stokes現象--beyond Thomae 150--
3. 学会等名 第3回古典解析・徳島研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 大山 陽介
2. 発表標題 高階超幾何方程式の q-Stokes 現象
3. 学会等名 函数方程式論サマーセミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ohyama, Yousuke
2. 発表標題 q-Stokes phenomenon of basic hypergeometric equations
3. 学会等名 Differential Galois theory in Strasbourg (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 大山 陽介
2. 発表標題 q-Stokes problems on basic hypergeometric equations
3. 学会等名 2019日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 大山 陽介
2. 発表標題 Connection formula of basic hypergeometric equations with one regular singular point
3. 学会等名 超幾何方程式研究会 2020
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 大山 陽介
2. 発表標題 q-Euler-Poisson-Darboux 方程式について
3. 学会等名 2022年度函数方程式論サマーセミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大山 陽介
2. 発表標題 A q-analogue of the Euler-Poisson-Darboux equation
3. 学会等名 2022 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ohyama, Yousuke
2. 発表標題 Global analysis on the Painleve equations
3. 学会等名 Painleve Equations: From Classical to Modern Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ohyama, Yousuke
2. 発表標題 Global geometry of q-Painleve equations
3. 学会等名 Differential Geometry and Integrable Systems --Celebrating Professor Yoshihiro Ohnita's retirement (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Painleve Equations: From Classical to Modern Analysis	開催年 2022年～2022年
---	--------------------



8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	リール大学	トゥールーズ大学		